ATLAS TEMÁTICOS

RELACIÓN DE TÍTULOS

CIENCIAS EXACTAS

Atlas de Matemáticas (Análisis + Ejercicios)
Atlas de Matemáticas (Álgebra + Geometría)
Atlas de Física
Atlas de Química
Atlas de Prácticas de Física y Química

CIENCIAS COSMOLÓGICAS

Atlas de Geología
Atlas de Mineralogía
Atlas de la Naturaleza
Atlas de los Fósiles
Atlas de la Arqueología

CIENCIAS NATURALES

Atlas de Zoología (Invertebrados)
Atlas de Zoología (Vertebrados)
Atlas de Parasitología
Atlas de Biología
Atlas de Botánica

CIENCIAS PURAS

Atlas del Átomo
Atlas de la Astronomía
Atlas de la Meteorología
Atlas de la Microscopia
Atlas de la Informática

ANATOMÍA

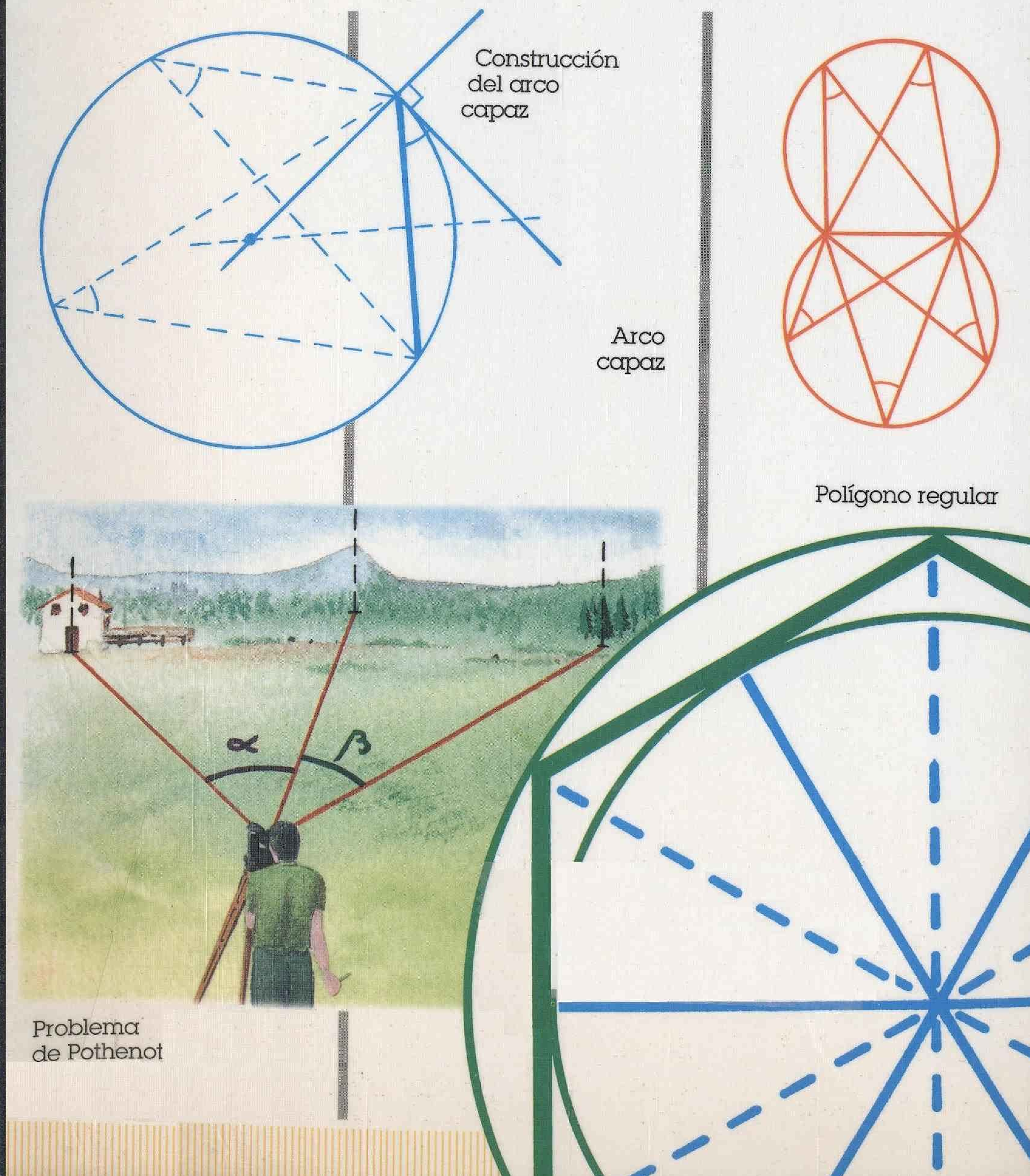
Atlas de Anatomía Animal
Atlas de Anatomía Humana
Atlas del Cuerpo Humano
Atlas del Hombre
Atlas de la Cirugía

MATEMÁTICAS Álgebra+ Geometría

ATLAS TEMÁTICO

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA+ GEOMETRÍA



MATEMÁTICAS

(álgebra y geometría) + ejercicios

IDEA BOOKS, S.A.

Título de la colección
ATLAS TEMÁTICOS

Texto e ilustración

Redacción / F. Hurtado, A. Quintana, B. Sanahuja, P. Taniguchi, J. Villanova

Ilustraciones / Equipo editorial

Diseño de la cubierta / Lluís Lladó Teixidó

Printed in Spain by
Emegé, Industria Gráfica, Barcelona

EDICIÓN 1997

PRÓLOGO

Al ATLAS DE MATEMÁTICAS, dedicado al Análisis, le acompaña en esta colección el tomo correspondiente al Álgebra y la Geometría. Puede decirse que entre ambos constituyen un muy amplio panorama de las matemáticas elementales y medias. De hecho, el volumen de Análisis va algo más allá, y aquella disciplina y la Geometría Analítica presuponen conocimientos de Aritmética y Geometría elementales que se ofrecen en el presente volumen, resultando éste, por tanto, de acceso mucho más asequible. El texto se halla dividido en tres grandes bloques. La primera parte, Álgebra y Aritmética, tras una introducción a los conjuntos y a las estructuras algebraicas, trata de conjuntos de números, operaciones, ecuaciones, polinomios, progresiones y combinatoria. Se ha dedicado un cuidado especial a los temas de Aritmética Mercantil. Así, en la tarjeta de proporcionalidad (A/9) surgen ya los temas de porcentaje, repartimiento proporcional y regla de compañía, y en A/16 y A/17, tras las progresiones, se tratan los temas de intereses, amortización, capitalización, descuento en factura y descuento en letra de cambio. La segunda parte del libro la constituye la Geometría Sintética, que introduce los elementos del plano y del espacio, triángulos, circunferencia, polígonos, movimientos y cuerpos sólidos. Se ha tenido en cuenta en su redacción el renovado auge de esta materia en la enseñanza (y que será cada vez mayor). La parte final la constituye la Geometría Analítica, plana y tridimensional, precedida por una introducción de Álgebra Vectorial.

A diferencia de los habituales libros de texto, que se explayan y demoran en la introducción de los conceptos, este ATLAS DE MATEMÁTICAS es condensado y directo, y, por ello, especialmente adecuado para poder acceder a (o recuperar) un concepto determinado o alguna de sus aplicaciones. Pero no debe ser confundido con un simple formulario: pese a la densidad, el texto incluye aclaraciones que dan luz allí donde es necesaria y la amplia colección de ejercicios resueltos, de indispensable consulta durante la lectura, contribuye eficazmente a tal propósito. Y en esa dirección, merece capítulo aparte el esfuerzo editorial de ilustración: un brillante apoyo visual, ciertamente desacostumbrado en libros de matemáticas.

Quisiera finalmente hacer constar la satisfacción que me ha supuesto el poder colaborar, en esta ocasión, con los restantes miembros matemáticos del Equipo Corb. Creo que, respetando cada estilo individual, hemos conseguido una obra bien coordinada y de gran utilidad para sus lectores.

FERRAN HURTADO

Álgebra

CONJUNTOS

La palabra *conjunto* significa «colección» de objetos; a esos objetos se les llama *elementos.* Si x es un elemento de un conjunto C, decimos que *x pertenece a C,* y escribimos $x \in C$.
Para explicar cómo es un conjunto C, o sea, para *definirlo,* podemos escribir $C = \{\ldots\}$, y colocar todos sus elementos dentro de las llaves, separados por comas (*definición por extensión*), o bien escribir una *propiedad característica* de los mismos, es decir, una propiedad que cumplan ellos y sólo ellos (*definición por comprensión*). Los conjuntos pueden representarse gráficamente con *diagramas de Venn* (figs. 3 a 6).
Se admite que existe un conjunto que no tiene elementos, llamado *conjunto vacío* y simbolizado por $\varnothing$. O sea, $\varnothing = \{\}$.
Escribiremos $A = B$, que se lee «*A igual a B*», sólo si A y B tienen, exactamente, los mismos elementos (dicho de otro modo, son el mismo conjunto).

• **Ejemplo.** Si V representa el conjunto de las letras vocales, escribiremos $V = \{a, e, i, o, u\}$ o $V = \{\textit{letras vocales}\}$. Obsérvese que $u \in V$, pero $m \notin V$.

Relación de inclusión. Subconjuntos

Dados dos conjuntos A y B, escribiremos $A \subset B$ si todos los elementos de A también lo son de B. $A \subset B$ se lee de cualquiera de estas formas: *A está contenido en B, A está incluido en B, A es un subconjunto de B, A es una parte de B.*
La inclusión de conjuntos tiene las propiedades *reflexiva* (1), *antisimétrica* (2) y *transitiva* (3); es decir,

1. Cualquier conjunto A cumple $A \subset A$,
2. Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$,
3. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Si A es un conjunto, $P(A)$ representa el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Se llama el *conjunto de las partes de A* (fig. 2).

Operaciones con conjuntos

Casi siempre, los conjuntos se definen a partir de otros mayores, que los contienen. Supondremos, pues, que se trabaja con conjuntos $A, B, C\ldots$ que son, todos, subconjuntos de otro mayor, E, al que llamaremos *referencial.*
Dados dos conjuntos A y B, se pueden definir los siguientes conjuntos:

$A \cup B$, llamado *unión de A* y *B,* que es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen ya sea a A, ya sea a B, o a ambos (fig. 3).

$A \cap B$, llamado *intersección* de A y B, es el conjunto formado por los elementos comunes a A y a B. Si A y B no tienen elementos comunes, $A \cap B = \varnothing$ y se dice que A y B son *disjuntos* (fig. 4).

A-B, llamado *diferencia* de A y B, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B (fig. 5).

Dado un conjunto A, se llama *complementario* de A, representado por A', al conjunto E-A. Está formado, pues, por los elementos del referencial que no son de A (fig. 6).
Se cumplen estas *propiedades:*

De la unión

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \varnothing = A$$

De la intersección

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Absorción y distributiva

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan

$$(A')' = A, (A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Pares ordenados. Producto cartesiano

El símbolo (a, b) se usa para representar lo que llamamos el *par ordenado* de objetos formado por a y b, llamados, respectivamente, *primera y segunda componente* del par. No debe confundirse (a, b) con el conjunto $\{a, b\}$ pues $\{a, b\} = \{b, a\}$, pero $(a, b) \neq (b, a)$. Sólo se cumple $(a, b) = (c, d)$ si $a = b$ y $c = d$.
Dados dos conjuntos A y B, llamados *producto cartesiano* de A por B, simbolizado por $A \times B$, al conjunto formado por todos los pares ordenados de la forma (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$. Véase en la figura 7 cómo se forma.

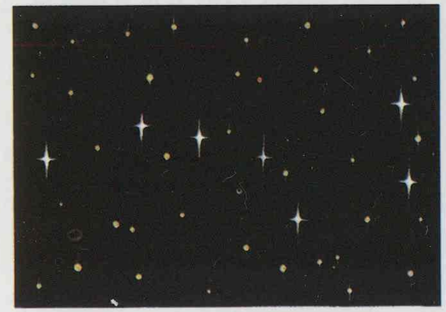


Fig. 1 – La Osa Mayor es un subconjunto del conjunto de las estrellas.

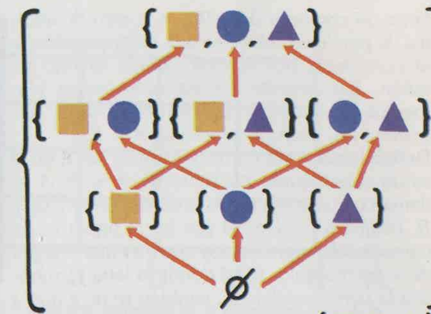


Fig. 2 – Conjunto P (E), siendo E =
Las flechas indican la relación de inclusión.

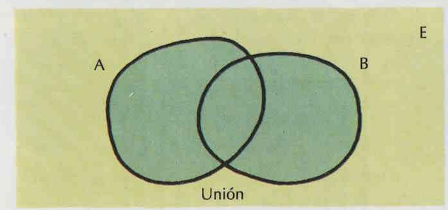


Fig. 3 – A ∪ B.

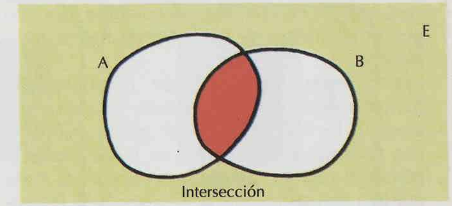


Fig. 4 – A ∩ B.

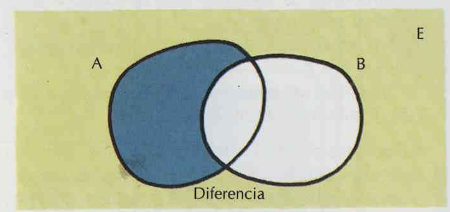


Fig. 5 – A-B.

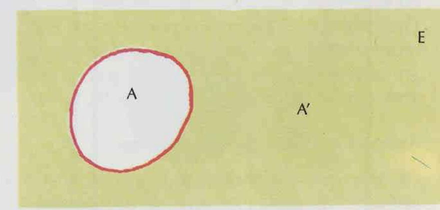


Fig. 6 – Conjunto complementario de A.

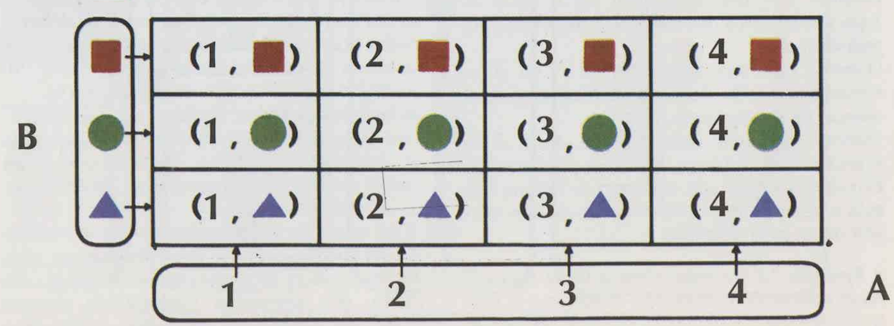


Fig. 7 – Formación del producto cartesiano A × B.

CORRESPONDENCIAS

Entre un conjunto de niños, *A*, y otro de adultos, *B*, puede establecerse una *correspondencia* al considerar, por ejemplo, quién es hijo de quién. Eso permite «emparejar» ciertos elementos de *A* con ciertos elementos de *B*, formando, así, un subconjunto de $A \times B$.

Definiciones. Una correspondencia de *A* en *B* es un subconjunto no vacío de $A \times B$. *A* se llama *conjunto inicial* de la correspondencia, y *B*, *conjunto final.* Si el par (a, b) figura en la correspondencia, diremos que *b* es una *imagen* de *a*, escrito $f(a) = b$, en donde la letra *f* simboliza la correspondencia; también se dice que *a* es una antiimagen de *b*.

Dominio de f (*Dom f*) es el conjunto formado por los elementos de *A* que tienen alguna imagen. *Imagen de f* (*Im f*) es el conjunto formado por los elementos de *B* que tienen alguna antiimagen.

Las correspondencias entre conjuntos de números suelen darse mediante fórmulas. Por ejemplo, las fórmulas $f(x) = x^2$, $g(x) = \pm\sqrt{x}$ definen correspondencias de **R** en **R** (conjunto de números reales). La primera asocia a cada número real su cuadrado, y la segunda le asocia sus dos raíces cuadradas, caso de ser positivo (los negativos no tienen raíces cuadradas en **R**).

Gráficamente, las correspondencias suelen representarse con *diagramas de flechas* o *diagramas cartesianos* (ver figuras 1 y 2, y obsérvese que $Dom\ f = \{a, b, d\}$, $Im\ f = \{1, 2, 4\}$).

Aplicación. Tipos de aplicaciones

Diremos que una correspondencia de *A* en *B* es *aplicación* si cada elemento de *A* tiene imagen y sólo una (cuidado: debe tenerla, pero puede coincidir con la de otro).

Diremos que una aplicación de *A* en *B* es *inyectiva* si nunca dos elementos de *A* tienen la misma imagen.

Diremos que una aplicación de *A* en *B* es *exhaustiva* si todo elemento de *B* es imagen, al menos, de un elemento de *A*.

Diremos que una aplicación de *A* en *B* es *biyectiva* si es, a la vez, inyectiva y exhaustiva. Ello significa que cada elemento de *A* tiene una sola imagen en *B*, y cada elemento de *B* es imagen de un solo elemento *A*.

• **Ejemplo.** La correspondencia de la figura 1 no es aplicación (*a* tiene dos imágenes y *c*, ninguna). $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 3)\}$ es aplicación, pero no es exhaustiva (2 no es imagen de ningún elemento de *A*) ni inyectiva (*a* y *b* tienen la misma imagen). $h = \{(a, 4), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$ es aplicación: además, es inyectiva y exhaustiva; por tanto, es biyectiva.

RELACIONES

Entre los elementos de un conjunto *A* suelen existir relaciones. Así, en el conjunto de alumnos de una clase pueden darse relaciones del tipo «ser hermano de»,«ser más alto que», «ser de la misma edad que», «ser vecino de», etc. Cada una de ellas permite, en principio, emparejar ciertos elementos de *A*, que la cumplen; al considerar elementos interrelacionados, unas relaciones permiten «clasificar» los elementos de *A*, otras permiten «ordenarlos», etc.

Definición. Una *relación, R,* sobre un conjunto *A*, es un subconjunto no vacío de $A \times A$.

Si $(a, b) \in R$, se suele escribir *aRb*, que se lee «*a* está relacionado con *b*».

Diremos que una relación tiene la propiedad:

1. *Reflexiva,* si cualquier elemento *a*, del conjunto, cumple *aRa*.
2. *Antirreflexiva,* si ningún elemento, *a*, del conjunto cumple *aRa*.
3. *Simétrica,* si siempre que se cumple *aRb*, también se cumple *bRa*.
4. *Antisimétrica,* si nunca se cumple *aRb* y *bRa*. salvo si $a = b$.
5. *Transitiva,* si siempre que se cumple *aRb* y *bRc*, también se cumple *aRc*.

Relaciones de equivalencia. Diremos que una relación es de *equivalencia* si tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Si *R* es una relación de equivalencia sobre *A*, y $a \in A$, el conjunto de elementos *A* relacionados con *a* constituye la llamada *clase de equivalencia de a*. Las distintas clases de equivalencia determinadas por *R* en *A* son disjuntas dos a dos y su unión es *A*: constituyen lo que llamamos una *partición* o *clasificación* de *A* (fig. 3a y b).

Relaciones de orden. Se llama así a las que tienen las propiedades antisimétrica y transitiva; si, además, es reflexiva, diremos que es de orden *amplio;* si es antirreflexiva, diremos que es de orden *estricto.*

Si en una relación de orden existen elementos no relacionados ni en un sentido ni en otro, diremos que es de *orden parcial;* si, por el contrario, dos elementos cualesquiera siempre están relacionados en un sentido u otro, diremos que es de *orden total* (fig. 3c y d).

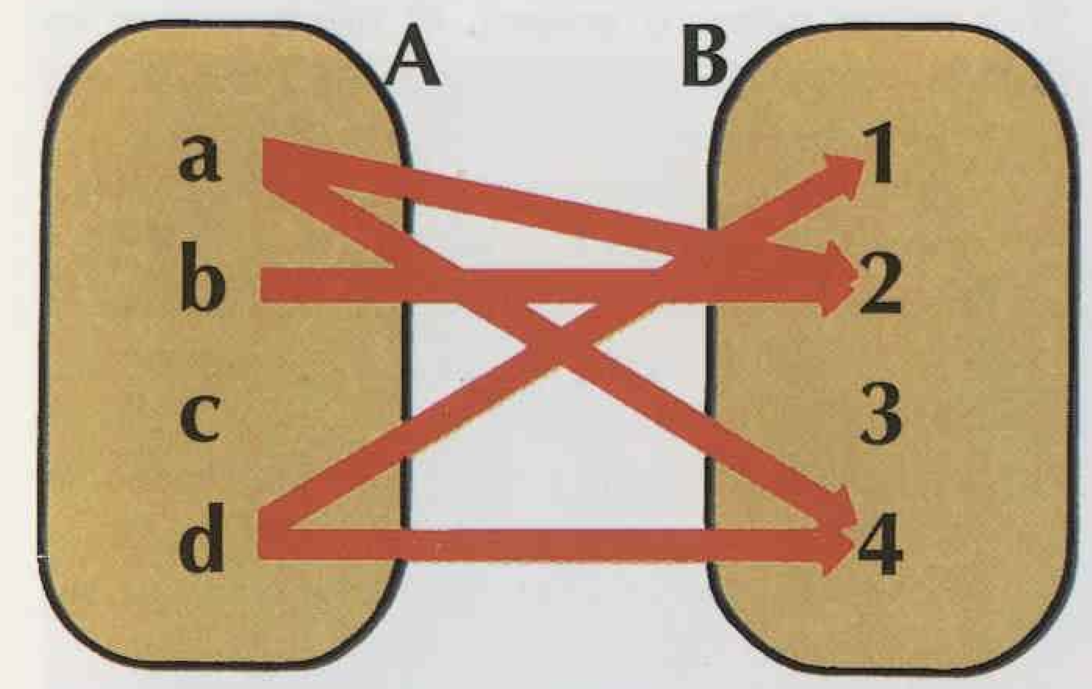


Fig. 1 – Diagrama de flechas de una correspondencia de A en B.

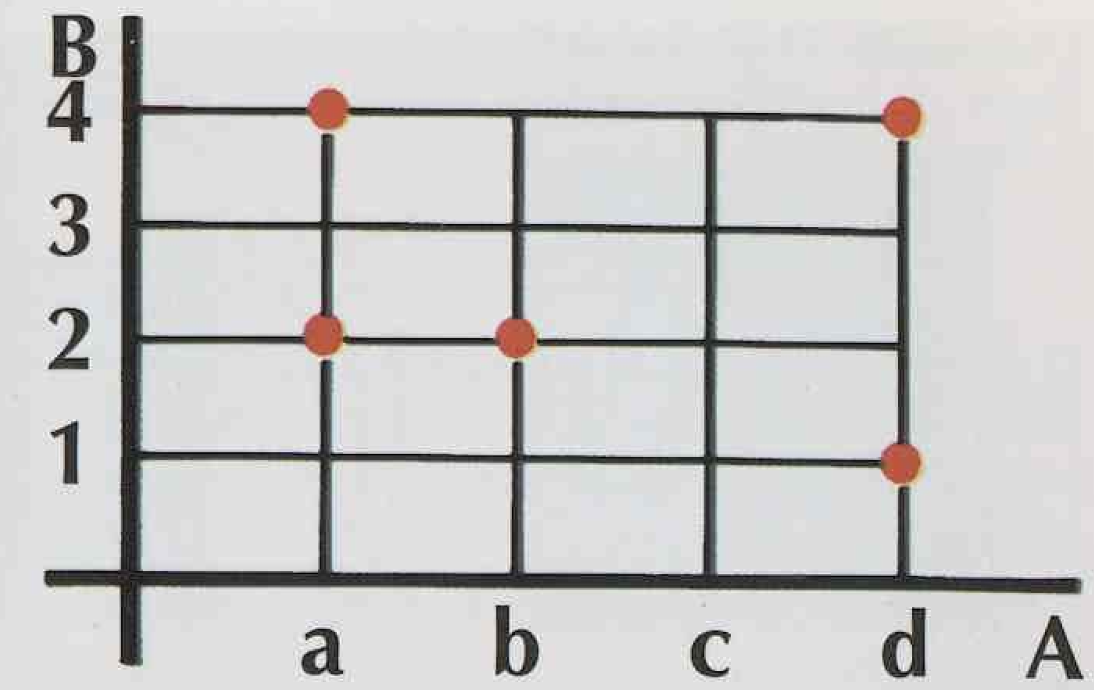


Fig. 2 – Diagrama cartesiano de la correspondencia de la figura 1.

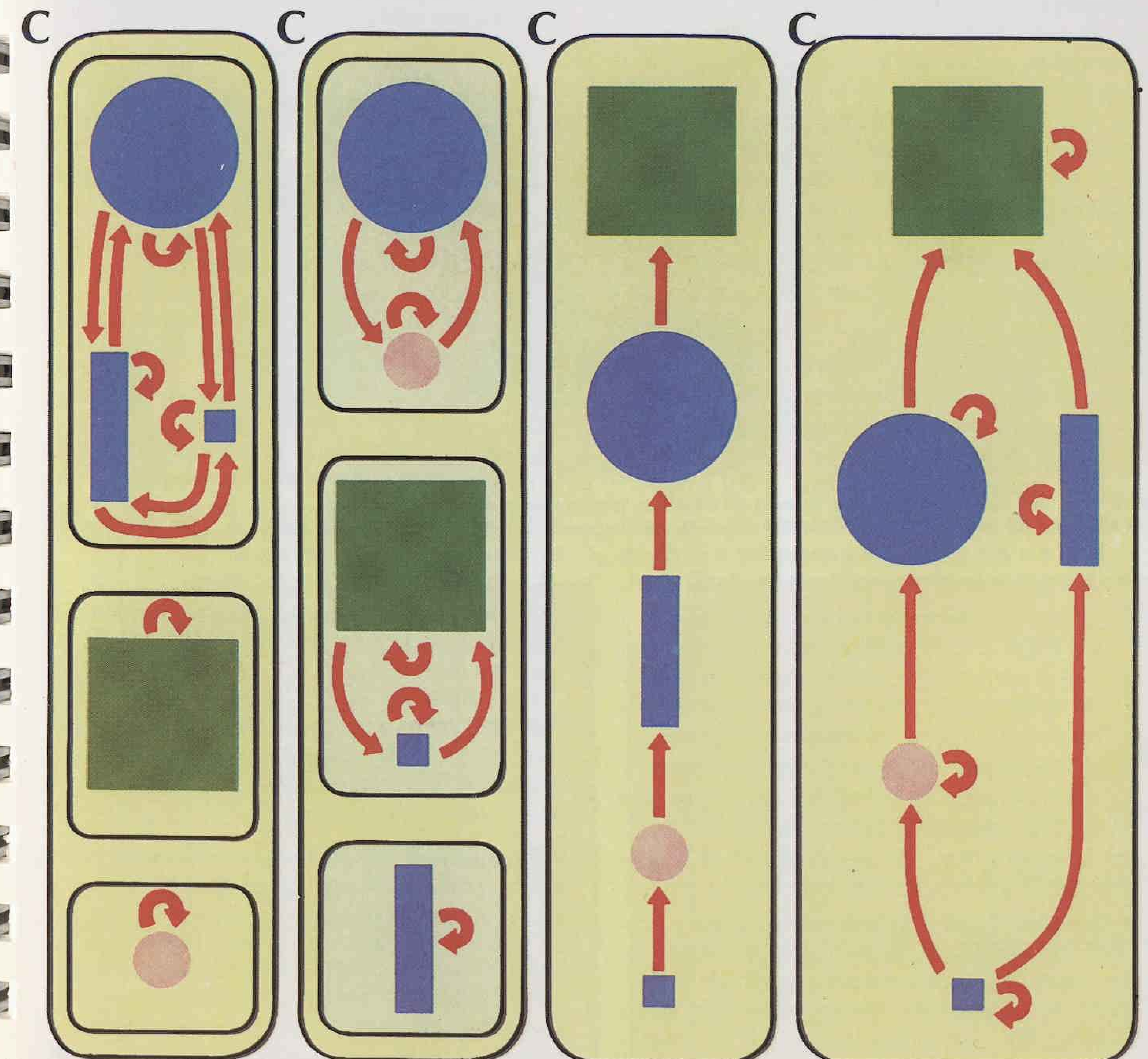


Fig. 3 – Las figuras a, b, c, d representan cuatro relaciones distintas sobre un mismo conjunto c; son, respectivamente, las relaciones «a es del mismo color que b», «a es de la misma forma que b», «a tiene menor área que b», y «a cabe en b». La primera y segunda son de equivalencia; la tercera es de orden total y la cuarta es de orden parcial.

OPERACIONES

Definición. Una *operación interna* en un conjunto A (o, simplemente, *operación*) es una aplicación de $A \times A$ en A:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (a, b) & \longmapsto & a \oplus b \end{array}$$

El elemento de A que corresponde al par (a, b) se llama *operado* de a y b, y se representa intercalando entre a y b el *símbolo* de la operación ($\oplus$, o el que sea).

• **Ejemplos.** En **N** (conjunto de los números naturales), suma y producto son operaciones internas, pero no lo es la resta: la suma, o producto, de dos naturales cualesquiera, es un natural (así, para el par (5, 9), se tiene que $5 + 9 = 14 \in \mathbf{N}$, y $5 \cdot 9 = 45 \in \mathbf{N}$); la resta de dos naturales no siempre es un natural ($5 - 9 = -4 \notin \mathbf{N}$).

Sea S el conjunto de los días de la semana, esto es, $S = \{L, M, Mc, J, V, S, D\}$. Se define una operación en S, como sigue: El operado de los días X e Y es el obtenido al «desplazar» X tantos lugares como indica el número de orden de Y en el conjunto de los siete días. Por ejemplo $Mc \oplus M = V$ $(Mc \to J \to V)$, y $V \oplus J = M$ $(V \to \to S \to D \to L \to M)$. Véase la lámina adjunta.

Propiedades de las operaciones. Sea A un conjunto y $\oplus$ una operación interna en él:

— Se dice que $\oplus$ tiene la propiedad *asociativa si se cumple* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, para cualesquiera elementos a, b y c de A.

— Si existe en A un elemento e, tal que $a \oplus e = a = e \oplus a$ (para cualquier $a \in A$), se dice que e es el elemento neutro de $\oplus$ en A.

— Si e es el elemento neutro de $\oplus$ en A, y a y b son dos elementos de A que cumplen $a \oplus b = e = b \oplus a$, diremos que son *opuestos*, o que cada uno es *opuesto* del otro (a veces se les llama *inversos*, o *simétricos*).

Si en A tenemos definidas dos operaciones $*$ y $\oplus$, diremos que $*$ es *distributiva* con respecto a $\oplus$ si, para cualesquiera elementos a, b, c de A, se cumple $a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$ y, también, $(b \oplus c) * a = (b * a) \oplus (c * a)$.

• **Ejemplos.** Es bien sabido que la suma y producto de números enteros tienen las propiedades asociativa y conmutativa; además, el producto es distributivo con respecto a la suma pues $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot \cdot a + c \cdot a$.

Existen elementos neutros en ambas operaciones: respectivamente el cero y el uno, pues

$$a + 0 = a = 0 + a \text{ y } a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

Si a es un número entero, el número que se obtiene al cambiarlo de signo es otro entero que, sumado con a, da cero, luego todos los enteros tienen opuesto para la suma (Ejemplo: El opuesto de -3 es $+3$, pues $(-3) + (+3) = 0$). No ocurre lo mismo con el producto, donde el «opuesto» de a debería ser un número que, multiplicado por a, diera 1. Si se utilizan fracciones, es posible hallar ese número (por ejemplo, en el caso de 3 se obtiene 1/3), pero no es entero; por tanto, no es correcto decir que, en el conjunto de los enteros, éstos tienen opuesto para el producto; sería correcto decirlo en el conjunto de los números racionales (fraccionarios) si se excluye al cero, que no tiene (piense el lector por qué).

ESTRUCTURAS: GRUPOS. ANILLOS Y CUERPOS

1. Diremos que el conjunto A, con la operación $\oplus$, es un *grupo*, si

$\oplus$ es asociativa,
existe elemento neutro de $\oplus$ en A,
todo elemento de A tiene opuesto.

Si, además, $\oplus$ tiene la propiedad conmutativa, diremos que es un *grupo conmutativo*.

2. Diremos que el conjunto A, con las operaciones $\oplus$ y $*$, es un *anillo*, si

A es grupo conmutativo con la operación $\oplus$,
$*$ es asociativa y distributiva con respecto a $\oplus$.

3. Diremos que el conjunto A, con las operaciones $\oplus$ y $*$, es un *cuerpo*, si

A es anillo con esas operaciones,
$*$ tiene elemento neutro (llamado «unidad», o «uno», para distinguirlo del neutro de $\oplus$, al que se llama «cero»),
todo elemento de A, salvo el cero, tiene opuesto para la operación $*$ (llamado «inverso», para distinguirlo del opuesto en $\oplus$).

Si además, $*$ es conmutativa, diremos que A es un *cuerpo conmutativo*.

• **Ejemplos.** El conjunto de los números enteros, con la suma, es un grupo conmutativo; con la suma y el producto es un anillo, pero no es cuerpo. El conjunto de los números racionales, con la suma y el producto, es un cuerpo conmutativo. El conjunto de los días de la semana, con la operación antes definida, es un grupo conmutativo (el elemento neutro es el domingo).

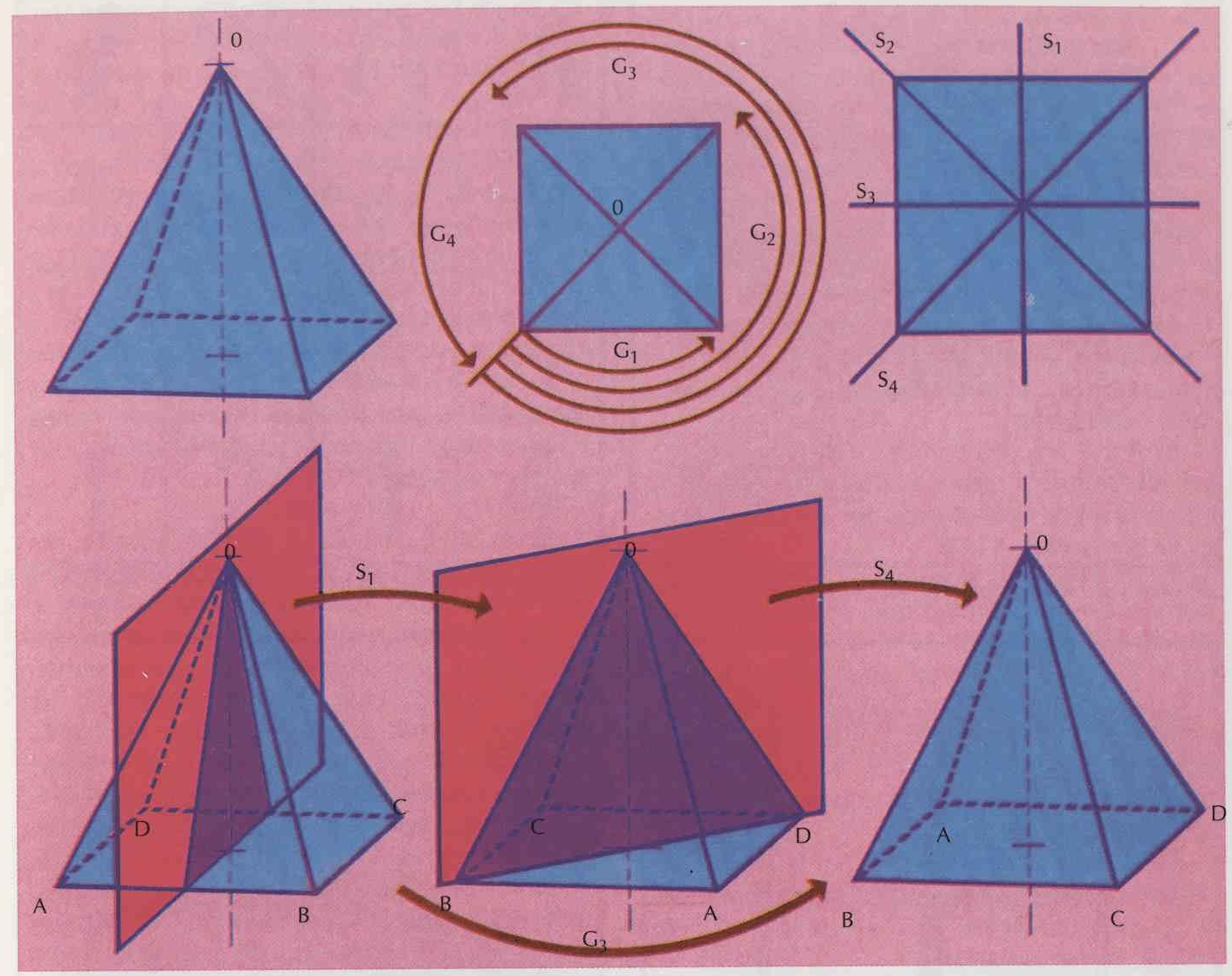


Fig. 1 – Hay ocho movimientos que dejan fija una pirámide regular cuadrada: los giros en torno a su eje de 90°, 180°, 270° y 360° (G_1, G_2, G_3 y G_4) y las simetrías planas S_1, S_2, S_3 y S_4. La composición de dos de ellos es alguno de los ocho (S_4 tras S_1 da G_3).

	L	M	Mc	J	V	S	D
L	M	Mc	J	V	S	D	L
M	Mc	J	V	S	D	L	M
Mc	J	V	S	D	L	M	Mc
J	V	S	D	L	M	Mc	J
V	S	D	L	M	Mc	J	V
S	D	L	M	Mc	J	V	S
D	L	M	Mc	J	V	S	D

Fig. 2 – Tabla del grupo de días de la semana (ver texto). Son opuestos L y S, M y V, Mc y J, D y D.

	S_1	S_2	S_3	S_4	G_1	G_2	G_3	G_4
S_1	G_4	G_1	G_2	G_3	S_2	S_3	S_4	S_1
S_2	G_3	G_4	G_1	G_2	S_3	S_4	S_1	S_2
S_3	G_2	G_3	G_4	G_1	S_4	S_1	S_2	S_3
S_4	G_1	G_2	G_3	G_4	S_1	S_2	S_3	S_4
G_1	S_4	S_1	S_2	S_3	G_2	G_3	G_4	G_1
G_2	S_3	S_4	S_1	S_2	G_3	G_4	G_1	G_2
G_3	S_2	S_3	S_4	S_1	G_4	G_1	G_2	G_3
G_4	S_1	S_2	S_3	S_4	G_1	G_2	G_3	G_2

Fig. 3 – Tabla del grupo de los ocho movimientos de la fig. 1. Véase que es un grupo no conmutativo.

LOS NÚMEROS NATURALES

Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... llamados *naturales*, se utilizan para expresar cuántos elementos tiene un conjunto (*contar*) o bien para indicar qué lugar ocupa un elemento en un conjunto bien ordenado. Por ejemplo, 5 puede indicar el número de dedos de una mano o el lugar que ocupa Mayo en el conjunto ordenado de los meses del año. Según se utilice de una u otra manera, diremos respectivamente que es un *número cardinal* u *ordinal*.

El *conjunto de los números naturales* suele representarse con la letra **N**, o sea, **N** = {1, 2, 3, ...}

Operaciones con naturales. Sea a y b dos naturales cualesquiera:

— Si A y B son dos conjuntos disjuntos, con a y b elementos, respectivamente, llamamos *suma* de a y b, simbolizado por $a + b$, al número de elementos $A \cup B$.

— La *diferencia* (o *resta*) de a y b, simbolizada por $a - b$, es el número que, sumando con b, nos da a (Ejemplos: $7 - 3 = 4$, pues $4 + 3 = 7$; pero, $3 - 7$ no es natural, pues no hay ningún natural que, sumado con 7, dé 3).

— Llamamos *producto* de a y b al número de elementos del conjunto $A \times B$, donde A y B son cualesquiera conjuntos con a y b elementos, respectivamente.

— El *cociente* (*o división*) de a por b, simbolizado por $a : b$, es el número, que, multiplicado por b, nos da a (Ejemplos: $8 : 2 = 4$, pues $4 \cdot 2 = 8$; pero, $8 : 3$ no es natural).

La suma y el producto son operaciones en **N**. La suma tiene las propiedades *asociativa* y *conmutativa*. El producto *es asociativo, conmutativo, distributivo respecto a la suma,* y tiene al uno como *elemento neutro* (suele llamarse *elemento unidad*).

La *resta* y *división* de números naturales no son, propiamente hablando, operaciones internas en **N**, como se ha podido ver en los ejemplos.

Orden en N. Dados dos naturales a y b, se dice que «a es *menor* que b» escrito $a < b$, si existe un natural n que, sumado con a da b, es decir $a + n = b$.

Esa relación es de orden estricto y total ($1 < 2 < < 3 < 4 < ...$). Además, si $a < b$ y c es un natural cualquiera, se cumple

$$a + c < b + c \quad \text{y} \quad a \cdot c < b \cdot c$$

Sistema de numeración. Como existen infinitos números naturales, deben establecerse reglas que permitan nombrarlos y escribirlos empleando unos pocos nombres y símbolos, tal como se hace con las palabras de un idioma, que se pueden escribir con un reducido número de letras. La figura 1 muestra ejemplos concretos utilizando viejos sistemas de numeración.

Nuestro sistema actual es *posicional, de base* 10. En los *sistemas posicionales* se asignan símbolos, llamados *cifras,* a «unos cuantos números», a partir del uno; al llegar a un determinado número p, llamado *base del sistema,* consideramos que se ha formado un «paquete» o *unidad de primer orden,* lo que se simboliza escribiendo 10, donde 1 indica «un paquete» de p elementos, y 0, que «no quedan unidades sueltas». A partir de ese momento se cuenta así: «un paquete y una unidad» (11), «un paquete y dos unidades» (12), etc; cuando se tienen p «paquetes» de primer orden se contabiliza «un paquete» o *unidad de segundo orden* y se escribe 100 («un paquete de segundo orden, ninguno de primer orden y ninguna unidad»). Y así, sucesivamente 101, 102, ..., 110, 111, ..., 200, 201, ..., 1000, 1001, ...

Así pues, 264, en base 10, expresa «cuatro unidades, seis paquetes de diez y dos paquetes de diez veces diez»: $264 = 4 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 100$.

Si los hombres tuviéramos cuatro dedos en cada mano, probablemente, al llegar al número que normalmente llamamos «ocho», y no disponer de más dedos para seguir contando, acordaríamos que ocho elementos ya constituyen una unidad de primer orden, y escribiríamos 10 para representar «ocho». Sólo necesitaríamos las cifras, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 0 para ese sistema, llamado de *base ocho,* y el número que comúnmente llamamos «nueve» se escribiría 11 («un paquete de ocho y una unidad»).

De igual modo podemos definir sistemas de base 2, 3, 4, 5, etc. Para indicar que un número está escrito en base p escribiremos sus cifras con el subíndice p al final del mismo. Por ejemplo, $264_{(8}$ está escrito en base ocho; en nuestra base, significa $4 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 = 2 + + 48 + 128 = 178$. Véase en los ejercicios correspondientes a esta tarjeta cómo pasar de cualquier base a base 10, y viceversa.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

El *Sistema Métrico Decimal* es un conjunto de unidades de longitud, superficie, volumen, capacidad y masa, definidas de modo que, dentro de las de una misma magnitud, cada una contiene diez veces a la inmediata más pequeña (excepto las de superficie, en las que cada una contiene cien veces a la siguiente, y las de volumen, en que cada una contiene mil veces a la siguiente). La unidad fundamental de longitud es el *metro,* y todas las demás guardan relación con ella (ver lámina adjunta). Esa disposición de las unidades facilita el «cambio» de una a otra (Ejemplo: 13 m = 13 × 10 dm = = 130 dm).

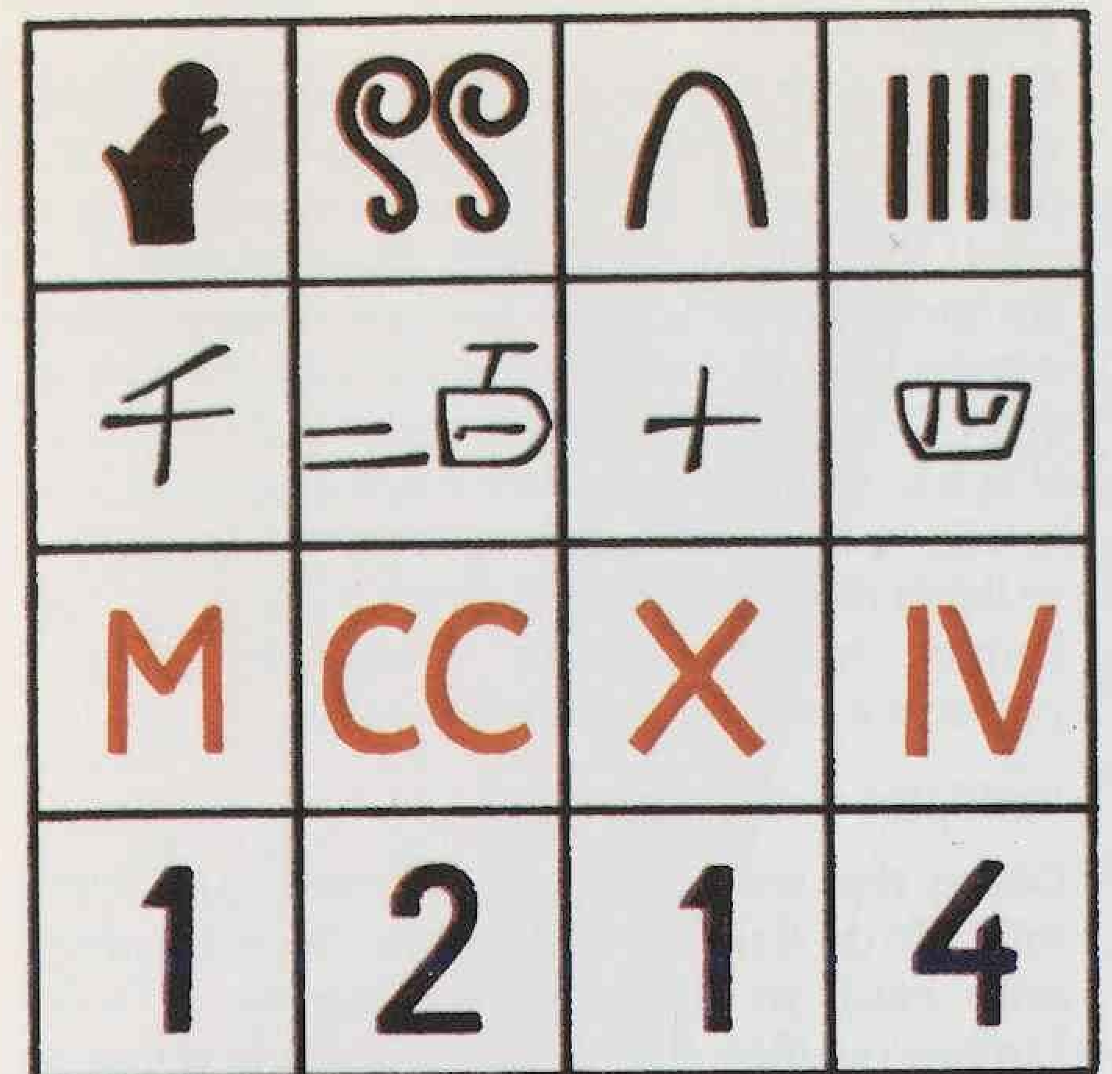


Fig. 1 – Representación de 1214 en los sistemas de numeración jeroglífico, chino y romano.

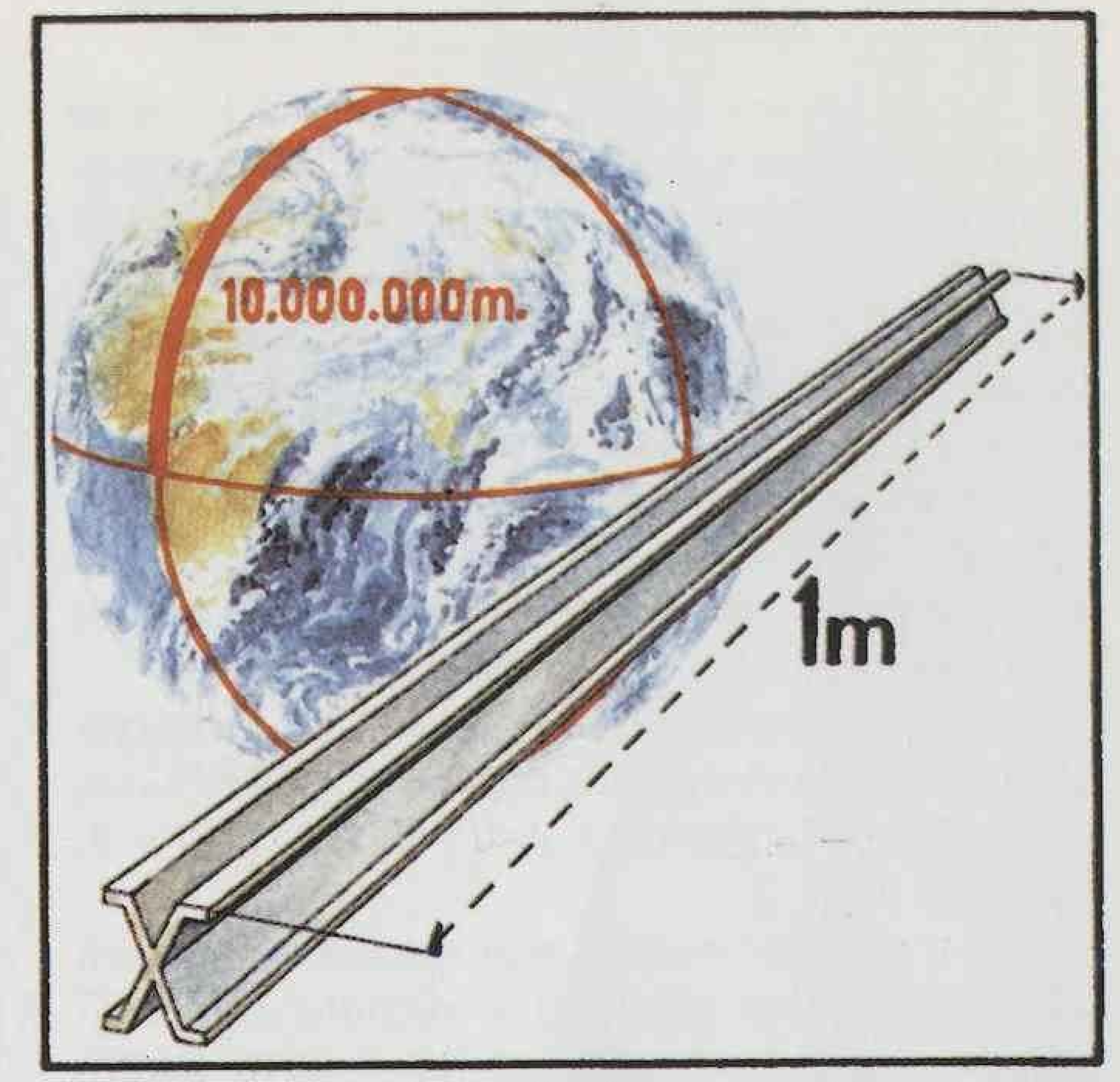


Fig. 2 – 1 metro ≃ 1 diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

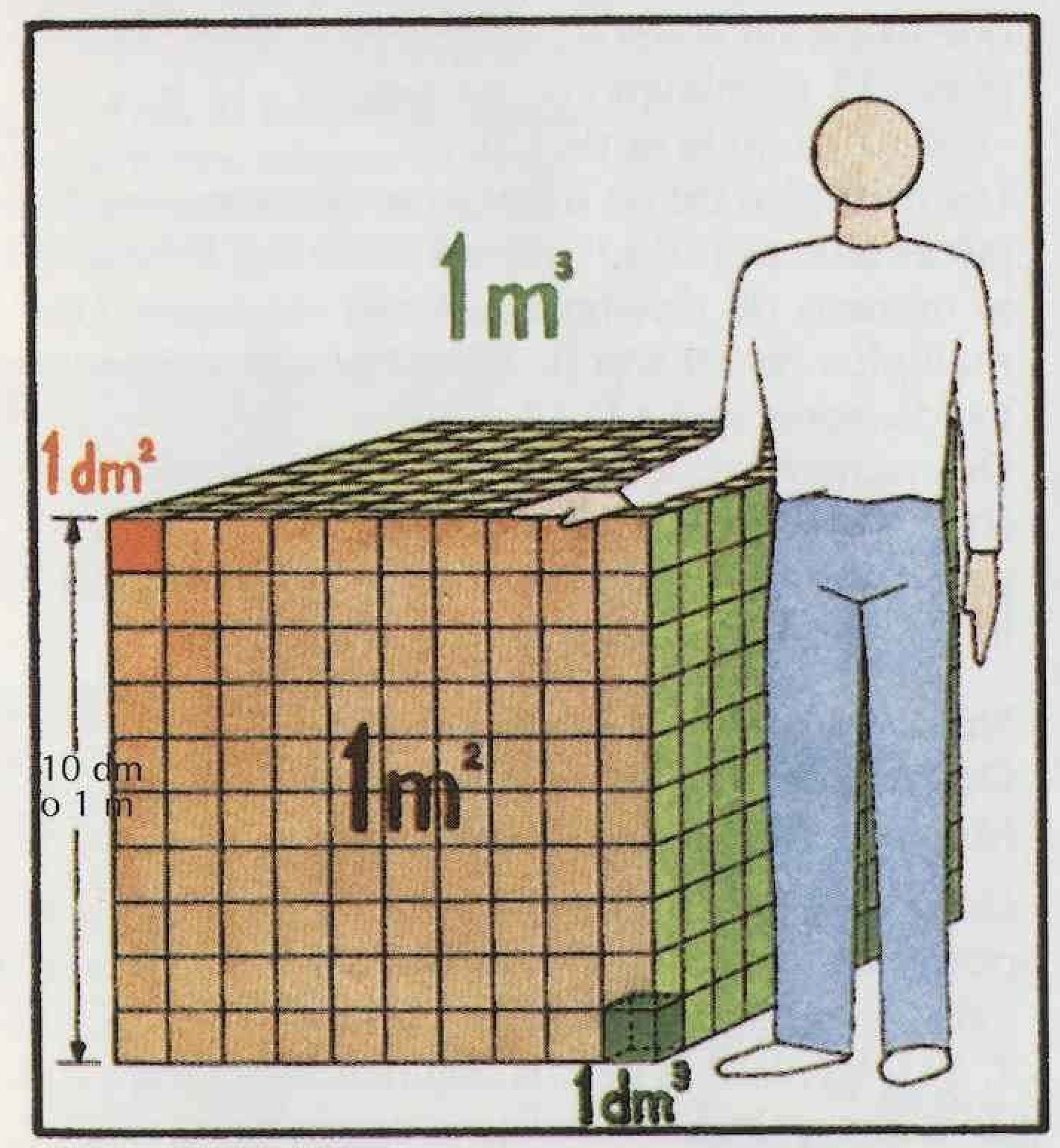


Fig. 3 – La unidad fundamental de volumen es el metro cúbico (m^3), volumen de un cubo de un metro de arista. Sus caras son metros cuadrados (m^2). Obsérvese que 1 m^3 = (10 x 10 x 10) dm^3 = 1.000 dm^3, y 1 m^2 = 100 dm^2.

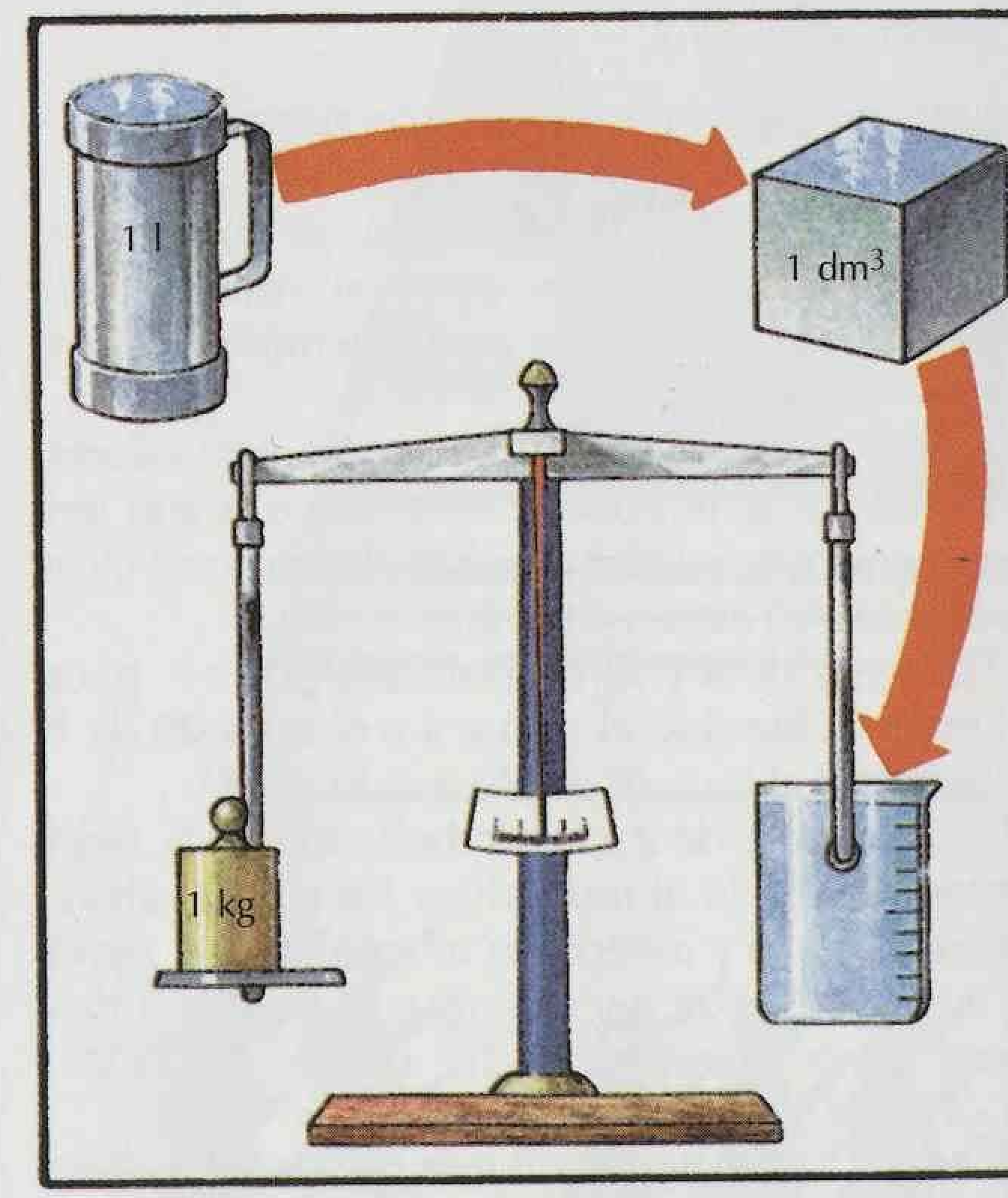


Fig. 4 – La unidad fundamental de capacidad es el litro (l), que es la capacidad de 1 dm^3. La unidad fundamental de masa es el kilogramo (kg), que es la masa de 1 l de agua.

VOLUMEN	m^3			dm^3			cm^3			mm^3
CAPACIDAD	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			
MASA DE AGUA	t	qm	mag	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Fig. 5 – Equivalencia entre unidades de capacidad, volumen y masa de agua.

LOS NÚMEROS ENTEROS

Concepto y definiciones

El cajero de un banco o supermercado debe anotar entradas y salidas de dinero. Para distinguir unas de otras, puede anteponerles un signo + (más) o – (menos). Así aparecen +4.350 o –2.300, que son *números enteros: positivos o negativos,* según lleven signo más o menos. El cero es entero, pero no es positivo ni negativo.

El *conjunto de los enteros* se representa con la letra **Z**. Así, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$. Los enteros positivos pueden identificarse con los números naturales, y escribirse sin signo.

— El *valor absoluto* de un entero *a*, simbolizado por $|a|$, es el número natural que se obtiene al suprimir el signo de *a*. Así, $|-3| = 3$, $|+8| = 8$. Además $|0| = 0$.

Se dice que dos enteros son *opuestos* si tienen el mismo valor absoluto y distinto signo. El nombre se debe a que, como se verá luego, suman cero (Ejemplo: +3 y –3 son opuestos).

Operaciones en Z

1. Dados dos enteros *a* y *b*, su *suma,* simbolizada por $a + b$, es el entero obtenido así:

Si *a* y *b* tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone al resultado el mismo signo que tienen *a* y *b* (Ejemplos: $(+3) + (+8) = +11$, $(-5) + (-4) = -9$).

Si tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y se le pone al resultado el signo del que tiene mayor valor absoluto (Ejemplos: $(-7) + (+3) = -4$, $(+3) + (-3) = 0$).

2. La *resta* de *a* y *b*, simbolizada por $a - b$, es el entero obtenido al sumar a *a* el opuesto de *b* (Ejemplo: $(-5) - (-8) = (-5) + (+8) = +3$).

3. El *producto* de *a* y *b*, simbolizado $a \cdot b$, es el entero obtenido al multiplicar los valores absolutos de *a* y *b* y anteponer al resultado el signo + o –, según que *a* y *b* tengan el mismo o distinto signo (Ejemplos: $(+2) \cdot (+4) = +8$, $(+3) \cdot (-5) = -15$, $(-3) \cdot (-6) = +18$).

Z, con la suma y el producto, es un anillo (ver tarjeta A/3). Además, el producto es conmutativo y tiene elemento unidad: el 1.

Orden en Z. Propiedades

Dados dos enteros *a* y *b*, diremos que *a* es *menor o igual* que *b*, escrito $a \leq b$, si $b - a$ es positivo o nulo. También se dice que *b* es *mayor o igual* que *a*, escrito $b \geq a$. La relación *menor o igual* es de orden total (amplio). Tiene, además, estas propiedades destacables:

I. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ para todo $c \in \mathbf{Z}$.

II. Si $a \leq b$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$ si *c* es entero positivo; pero $a \cdot c \geq b \cdot c$, si *c* es negativo.

DIVISIBILIDAD EN Z

División entera

Dividir *D* por *d* es buscar otro entero, *c*, tal que $d \cdot c = D$. La división no es operación en **Z**, pues no siempre existe *c*. Por ejemplo, $(-12) : (+4) = -3$; pero, $(-12) : (+5)$ no es entero.

Lo que sí puede hacerse siempre es buscar dos enteros *c* y *r*, de modo que se cumpla $D = d \cdot c + r$, y $0 \leq r < |d|$ (Ejemplo: En el caso $D = -12$, $d = +5$, se tiene $c = -3$ y $r = +3$, pues $-12 = (+5) \cdot (-3) + (+3)$, y $0 \leq +3 < 5$). Tal operación se llama *división entera* de *D* por *d*; *D, d, c* y *r* se llaman, respectivamente, *dividendo, divisor, cociente* y *resto* de la división entera.

Múltiplos y divisores

Dados dos enteros *m* y *d*, diremos que *m* es *múltiplo* de *d* si la división entera de *m* por *d* da resto cero; se simboliza escribiendo $m = \dot{d}$. También se dice que *d* es *divisor* de *m*, o que *d divide* a *m*; se simboliza escribiendo $d \mid m$.

Obsérvese que $m = \dot{d}$ (o $d \mid m$) equivale a decir que existe un entero *c*, tal que $m = d \cdot c$. (Ejemplos: –12 es múltiplo de +3 porque $-12 = (+3) \cdot (-4)$, pero no lo es de +5).

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicándolo por 0, ±1, ±2, ±3, … y hay infinitos: el número de divisores es finito (Ejemplo: Los múltiplos de +9 son 0, ±9, ±18, ±27, ±36, …; los divisores son ±1, ±3 y ±9).

Dos números opuestos tienen los mismos divisores y múltiplos. Daremos las definiciones y propiedades que siguen sólo para positivos; el lector puede trasladarlas a los negativos.

Números primos y compuestos. Descomposición en factores. M.C.D y M.C.M de dos números

Decimos que un entero es *primo* si no es 1 y sólo puede dividirse por sí mismo y por uno. Existen infinitos números primos; los primeros son 2, 3, 5, 7, 11, … (véase la lámina adjunta). Si un número no es primo (ni es 1) se llama *compuesto.*

Teorema. Todo número compuesto puede expresarse, de una única manera, como producto de números primos (Ejemplos: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$). Esa forma de expresarlo se llama su *descomposición en factores primos.*

Dados dos números *a* y *b*, el menor de sus múltiplos comunes se llama *mínimo común múltiplo* de *a* y *b*, simbolizado por *M.C.M.* (*a, b*); el mayor de los divisores comunes de *a* y *b* se llama *máximo común divisor* de *a* y *b*, simbolizado por *M.C.D.* (*a, b*). Si *M.C.D.* (*a, b*) = 1, se dice *que a* y *b* son *primos entre sí.* (Sobre el cálculo de *M.C.M.* y *M.C.D.*, ver ejercicio A/5-5).

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Fig. 1 – Criba de Eratóstenes. Eliminando los múltiplos de 2, 3, 5 y 7, distintos de ellos mismos, los números que quedan entre 2 y 100 son primos: los múltiplos de 11 ya están eliminados hasta 11 x 11, que es mayor que 100, y lo mismo sucede con los de 13, 17, etc.

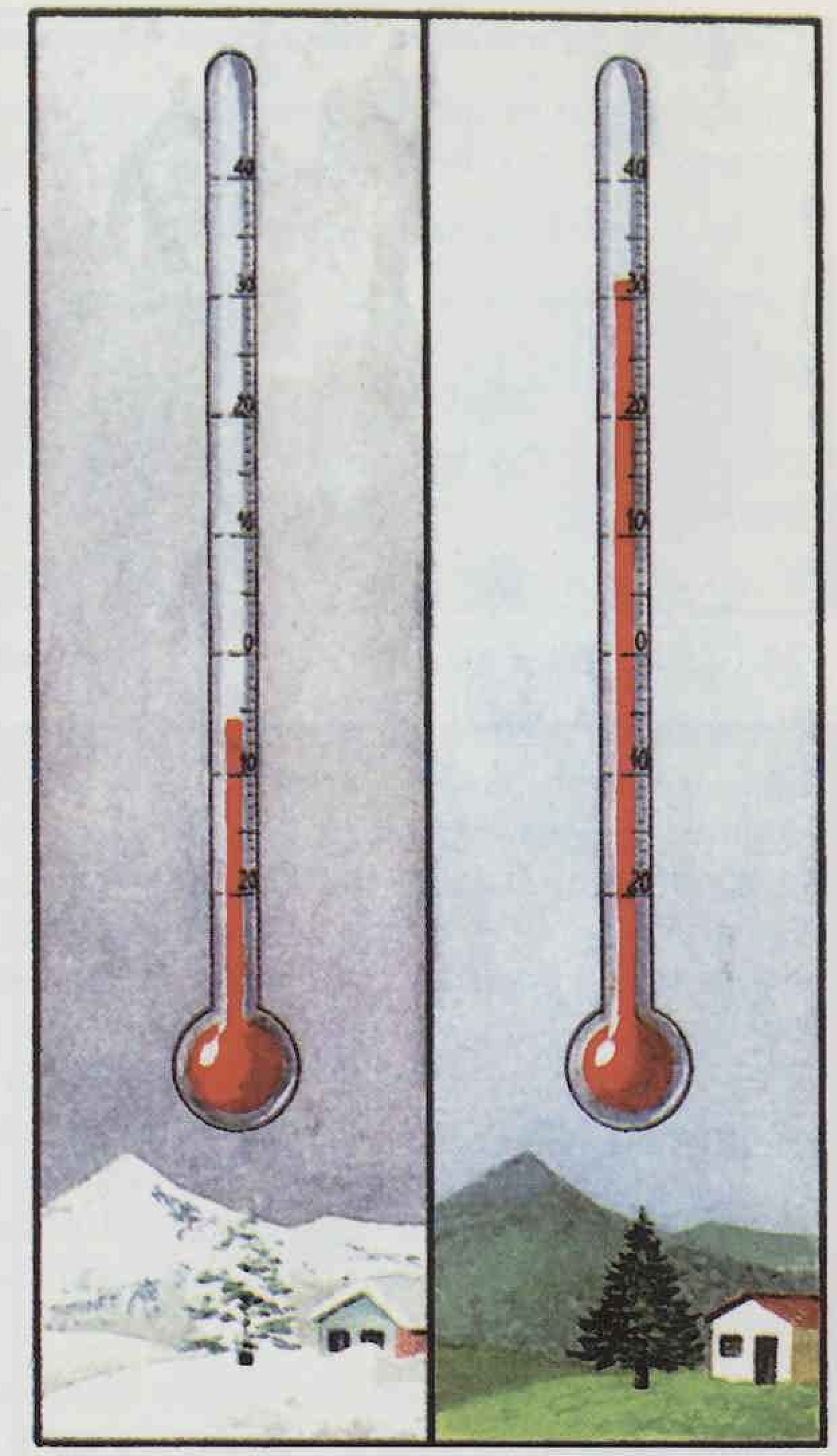


Fig. 2 – Un termómetro proporciona un buen ejemplo del significado de los números enteros. En la figura, los termómetros marcan, respectivamente, –6 °C y +32 °C

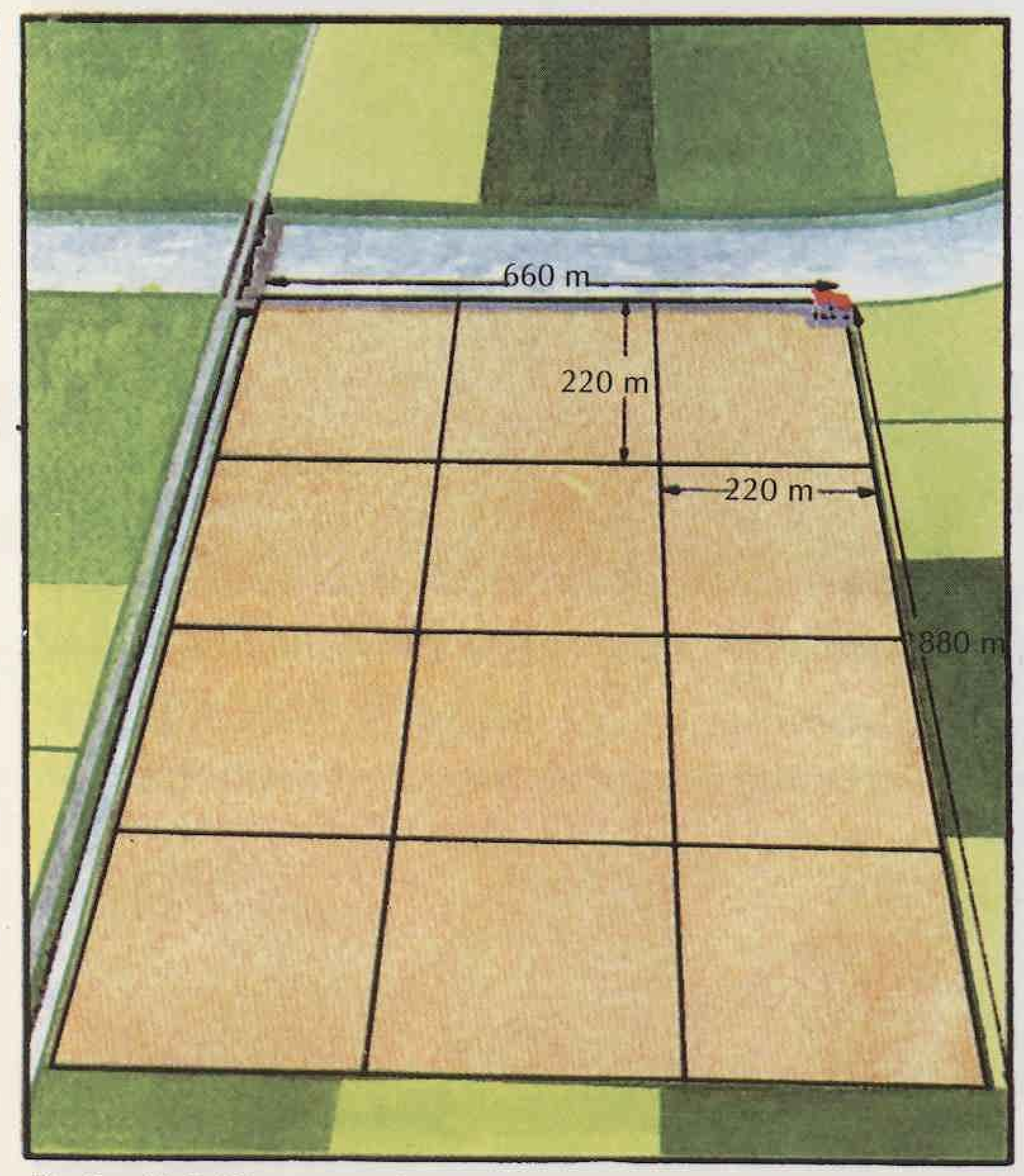


Fig. 3 – Al dividir en parcelas cuadradas un terreno de 660 m x 880 m, lo más grandes que pueden hacerse es de 220 m de lado, pues M.C.D. (660, 880) = 220.

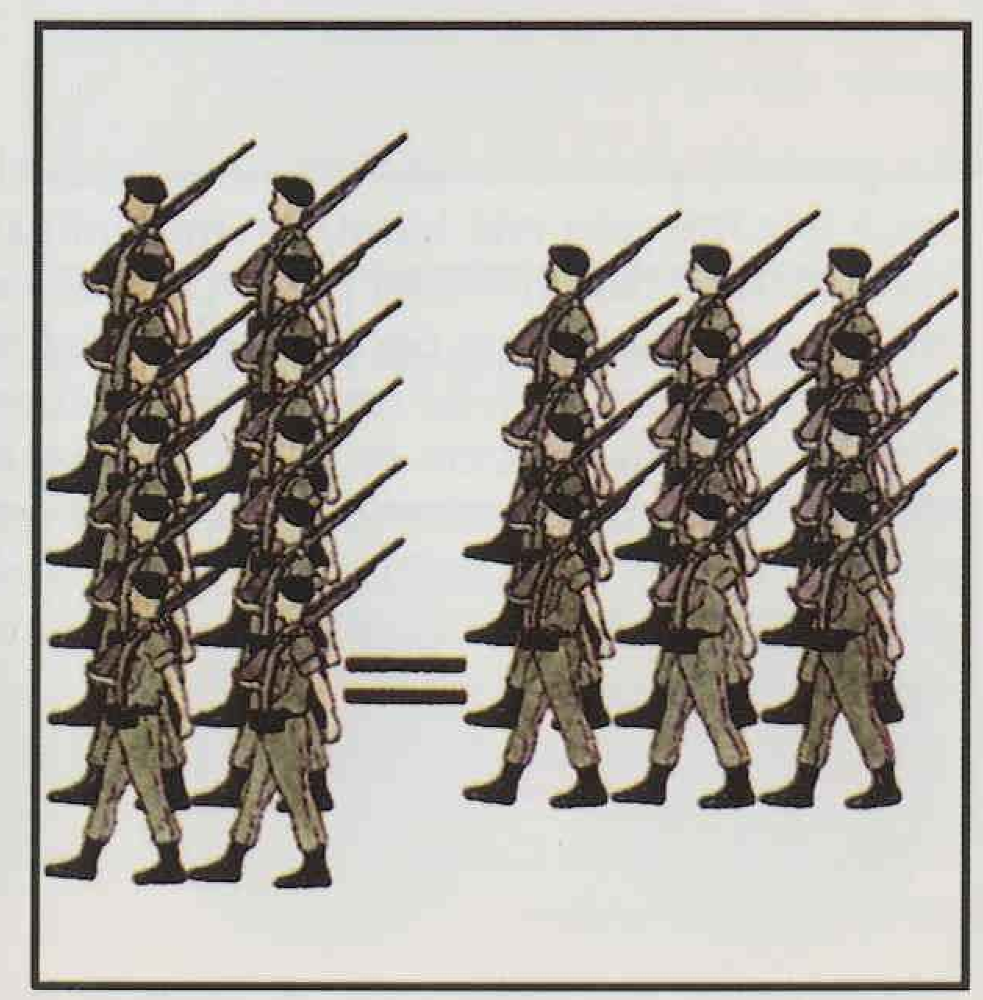


Fig. 4 – Para que puedan desfilar en filas de 6 o filas de 4, indistintamente, necesitamos, como mínimo, 12 soldados, pues 12 = M.C.M. (6, 4).

NÚMEROS RACIONALES

Concepto de fracción. Fracciones equivalentes

Una *fracción* es un par ordenado de números enteros, n y d, con $d \neq 0$, escrito en la forma $\frac{n}{d}$ (o n/d, sólo si se escribe aislada); a n se le llama *numerador* y, a d, *denominador* (Ejemplos: $\frac{-3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{0}{8}, \frac{-5}{-6}$).

Diremos que las fracciones n_1/d_1 y n_2/d_2 son *equivalentes*, y escribiremos $n_1/d_1 = n_2/d_2$ si $n_1 \cdot d_2 = n_2 \cdot d_1$ (Ejemplo: $\frac{24}{10} = \frac{36}{15}$, pues $24 \cdot 15 = 360 = 10 \cdot 36$).

El concepto de fracción tiene su origen en problemas como éste: al contar, por ejemplo, cuántos quesos hay en la despensa, podemos encontrar en ella dos quesos y «un trozo». Si ese trozo es medio queso, lo representamos por 1/2, leído «un medio» (ver figura 1); si es lo que quedó después de dividir el queso en tres partes iguales y separar una, lo representamos por 2/3, leído «dos tercios» (figura 1). Obsérvese que el denominador, 3, indica en cuántas partes iguales fue dividido el queso, y el numerador, 2, de cuántas de esas partes se compone el trozo representado por la fracción.

2/3 también expresa el «resultado exacto» de dividir 2 por 3: al repartir dos quesos entre tres personas, en partes iguales, a cada una le corresponden 2/3 (figura 2).

La equivalencia de fracciones expresa el hecho de que ambas «representan la misma cantidad». Esta idea queda ilustrada en la figura 3, a partir de 1/2 y 3/6 (equivalentes).

En general, para obtener fracciones equivalentes a una fracción n/d, basta con multiplicar su numerador y denominador por un mismo entero m, o dividir ambos por un mismo entero c que, por supuesto, debe ser un divisor común. *Simplificar* una fracción es hallar otra equivalente, cuyo denominador (o numerador) sea el menor posible: Se consigue dividiendo ambos por su M.C.D. (Ver ejercicio A/6-1). Si numerador y denominador son primos entre sí, no se puede simplificar: la fracción es *irreducible.*

Número racional: Concepto, operaciones y propiedades, orden

Llamaremos «racional n/d» al número representado por la fracción n/d o por cualquier otra equivalente. El *conjunto de los números racionales* suele representarse con la letra **Q**.

Todo número entero, z, puede identificarse con el racional representado por $z/1$. Por ejemplo, $-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = \ldots$). En consecuencia, puede considerarse que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Adoptaremos el convenio de escribir un solo signo en cada fracción n/d, delante de la misma: + o – según n y d tengan, o no, el mismo o distinto signo. Según este convenio, el racional que representan se llamará *positivo*, o *negativo*. Las fracciones de forma $0/d$, todas equivalentes, constituyen el llamado *racional cero*, o *nulo*, comúnmente representado por 0, sin más (Ejemplos: $\frac{-4}{-5} = +\frac{4}{5}, \frac{-3}{+8} = -\frac{3}{8}, \frac{+5}{-3} = -\frac{5}{3}, \frac{0}{-4} = 0$).

La *suma y producto* de dos racionales, n_1/d_1 y n_2/d_2, se definen como sigue:

$$\text{Suma: } \frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 \cdot d_2 + n_2 \cdot d_1}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\text{Producto: } \frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{d_1 \cdot d_2}\,.$$

Existe, no obstante, otra forma de hacer la suma, que se explica en el ejercicio A/6-3.

Con la suma y el producto, **Q** es *cuerpo conmuntativo* (ver tarjeta A/3): el opuesto de $\pm n/d$ es $\mp n/d$, y el inverso es $\pm d/n$ (Ejemplos: $\text{op}\left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{3}{5}$, $\text{inv}\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{3}$).

La *resta,* al igual que en **Z**, consiste en «sumar el opuesto». La *división* de dos racionales, $\frac{n_1}{d_1}$ y $\frac{n_2}{d_2}$, simbolizada por $\frac{n_1}{d_1} : \frac{n_2}{d_2}$, consiste en multiplicar $\frac{n_1}{d_1}$ por el inverso de $\frac{n_2}{d_2}$. Siempre puede efectuarse, salvo la «división por cero», que no es posible porque cero no tiene inverso (Ejemplo: $\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$).

Dados dos racionales n_1/d_1 y n_2/d_2, diremos que n_1/d_1 es menor o igual que n_2/d_2, y escribiremos $\frac{n_1}{d_1} \leq \frac{n_2}{d_2}$, si $\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1}$ es positivo o nulo. Esta relación es de *orden total amplio,* y tiene propiedades análogas a las de la misma relación en **Z**.

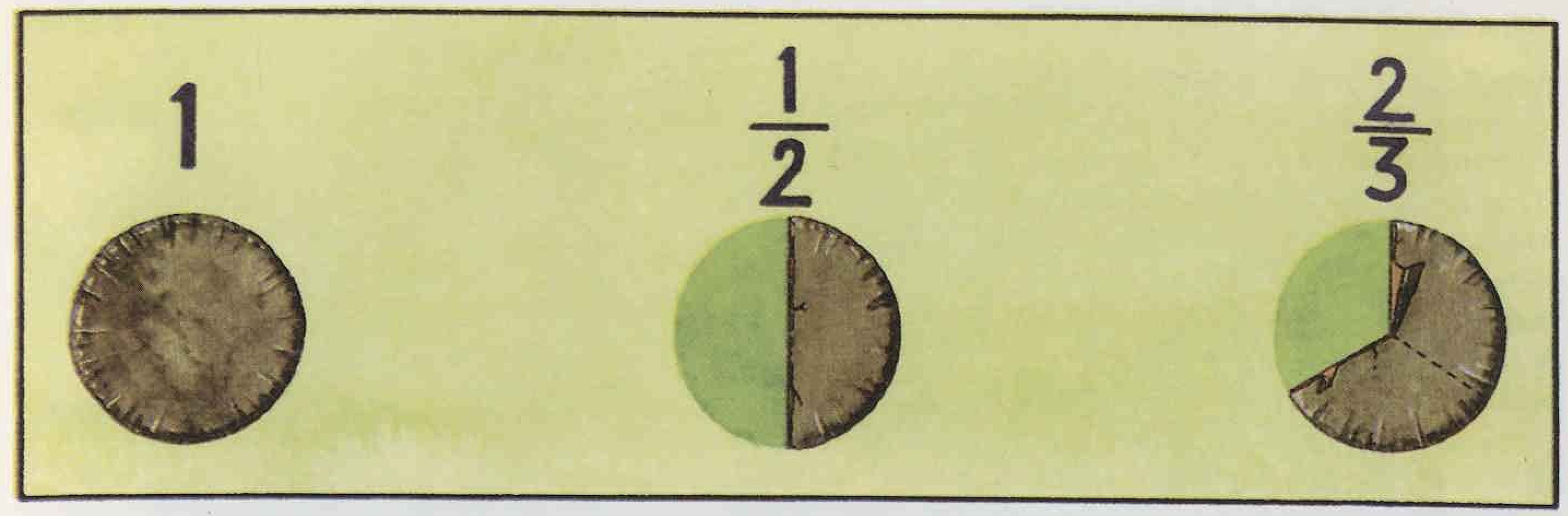


Fig. 1 – Un queso entero, medio queso, y dos tercios de queso, respectivamente.

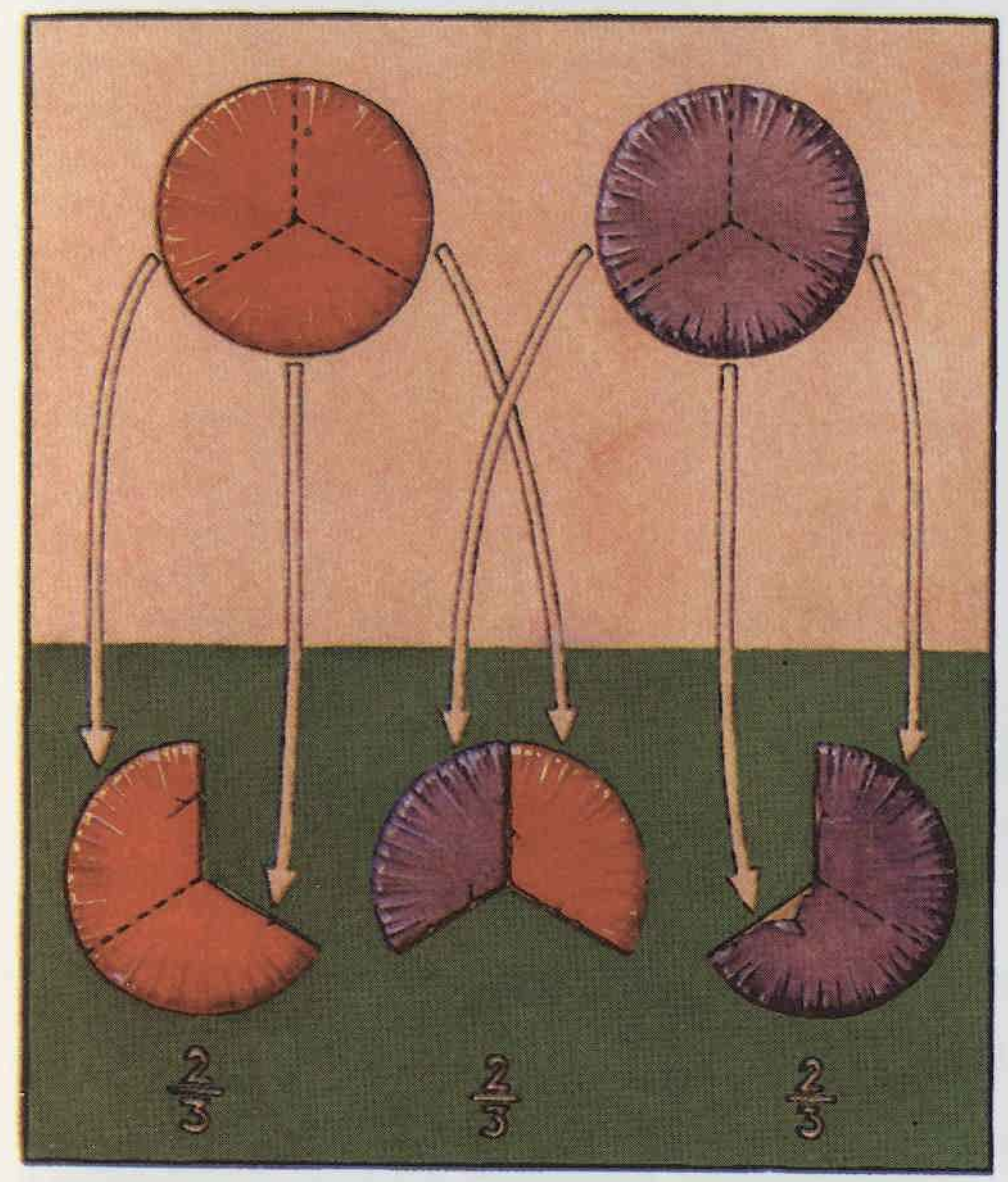


Fig. 2 – Dos quesos repartidos en partes iguales entre tres personas: a cada una le corresponden $\frac{2}{3}$.

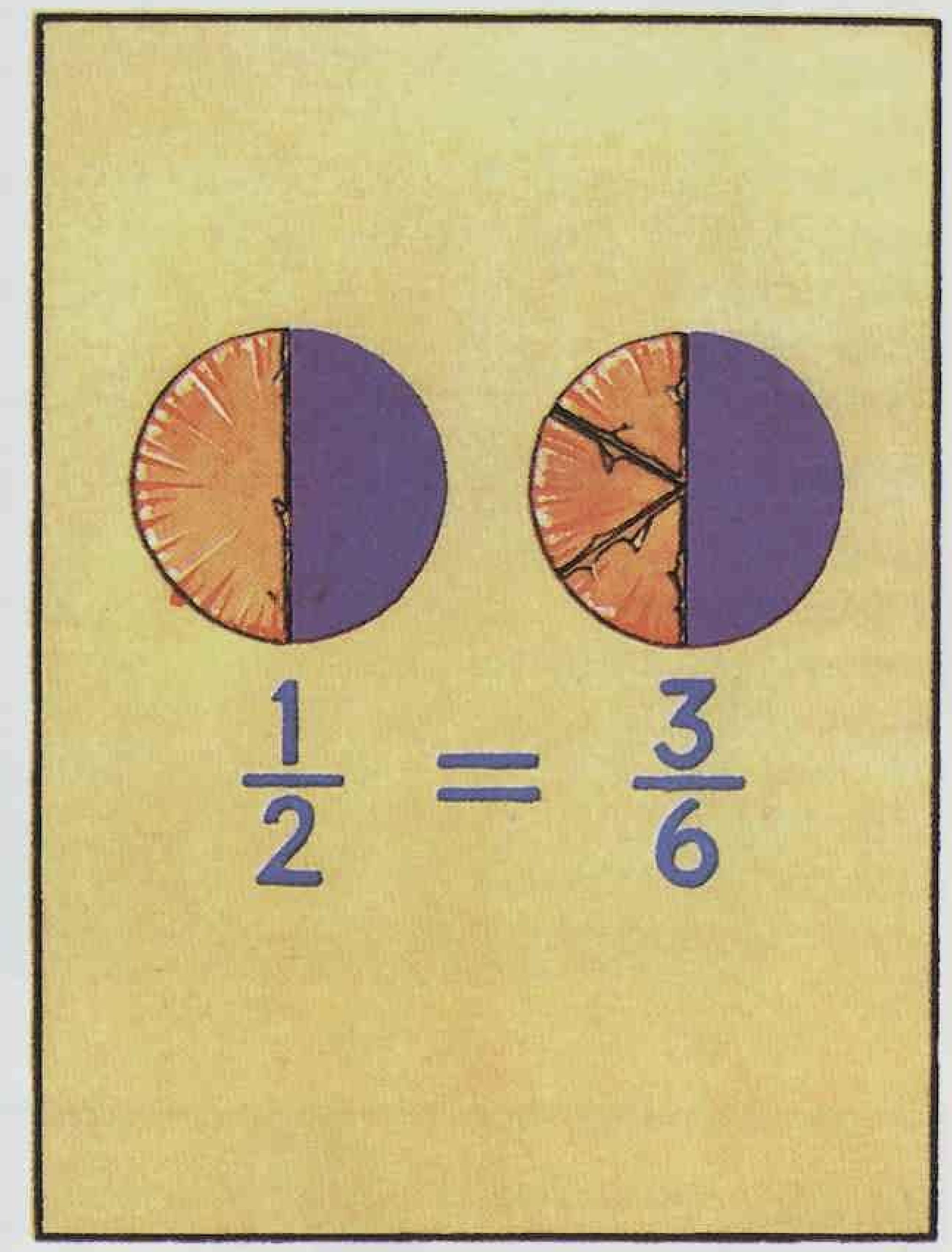


Fig. 3 – $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ representan la misma cantidad. Por eso se dice que son equivalentes o «iguales».

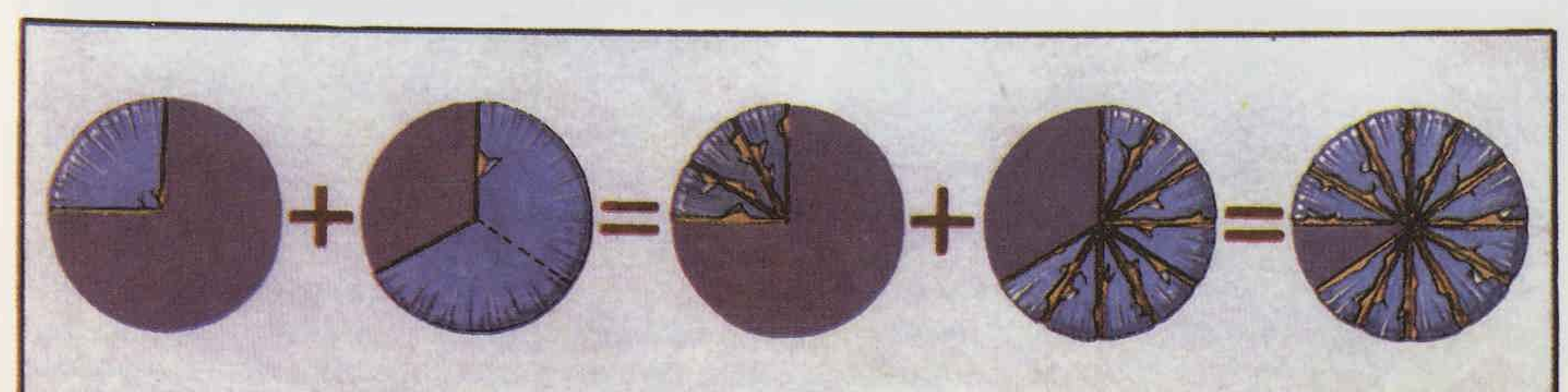


Fig. 4 – Esta figura explica por qué $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$.

REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Imagínese que se desea medir las longitudes de distintos segmentos o líneas, utilizando una determinada unidad. Por ejemplo, en la figura 1 de la lámina adjunta, la diagonal del cuadrado (*d*), el lado del hexágono (*e*) y la circunferencia (*c*); la unidad a emplear, en este caso, será la longitud del lado del cuadrado, que se supone de 1 dm (compruébese).

Midiendo como indican las figuras 2 y 3, se verá que $d \cong 14$ cm 1 mm $e \cong 50$ mm y $c \cong 3$ dm 14 cm (se usa el símbolo $\cong$, que se lee «aproximadamente igual a», porque sabemos que esas medidas pueden no ser exactas). Como hemos acordado utilizar el decímetro (lado del cuadrado) como unidad, escribiremos $d \cong 1{,}41$, $e \cong 0{,}50$ y $c \cong 3{,}14$.

Obsérvese que el uso del sistema métrico decimal nos ha llevado a utilizar *números decimales,* como 1,41, 0,50 y 3,14. Veamos qué son esos números.

Fracciones decimales: Son las que tienen por denominador una potencia de diez, como $\frac{141}{100}$ («ciento cuarenta y una centésimas»).

Números decimales finitos. Son los que pueden representarse mediante fracciones decimales (por tanto, son racionales). Para escribirlos, se adopta el convenio de escribir el numerador de la fraccion decimal que los representa, separando con una coma tantas cifras del mismo, a la derecha, como ceros tiene el denominador. Ejemplos:

$$\frac{141}{100} = 1{,}41; \ \frac{34}{10.000} = 0{,}0034.$$

Debe observarse que no todos los números racionales son decimales finitos. Por ejemplo, $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$, pero $\frac{1}{3} = \frac{n}{1.000\ldots}$ no es posible, pues el entero n debería cumplir $n = \frac{1.000\ldots}{3}$, pero ninguna potencia de 10 es divisible por 3.

Un método para saber si una fracción equivale, o no, a un decimal finito, consiste en dividir su numerador, seguido de ceros, por su denominador, colocando una coma en el cociente en el momento de añadir el primer cero al numerador. Si se llega a obtener resto cero, la fracción se convierte en el decimal finito que aparece en el cociente; si no, forzosamente se repite un resto y se forma una sucesión de cifras en el cociente, llamada *período,* que se va repitiendo indefinidamente, lo cual indica que la fracción no equivale a un decimal finito.

- **Ejemplo.** Dadas las fracciones $\frac{7}{16}$ y $\frac{7}{22}$, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 7{,}000 & 16 \\ \hline 60 & 0{,}4375 \\ 120 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7{,}000\ldots & 22 \\ \hline 40 & 0{,}3181818\ldots \\ 180 & \\ 40 & \\ 180\ldots & \end{array}$$

Luego $\frac{7}{16} = 0{,}4375$, y $\frac{7}{22}$ no equivale a ningún decimal finito.

Aunque 7/22 no equivalga a ningún decimal finito, los números 0,3, 0,31, 0,318, que se van obteniendo por el «método de la división», constituyen una sucesión de *aproximaciones decimales* de 7/22 (llamadas, respectivamente, de *primer orden* o *hasta las décimas, de segundo orden* o *hasta las centésimas,* etc.). Exactamente, es fácil demostrar que se cumple $0{,}3 < \frac{7}{22} < 0{,}4$, $0{,}31 < \frac{7}{22} < 0{,}32$, etc. Es obvio que en esa sucesión pueden encontrarse decimales finitos «tan próximos a 7/22 como se desee». Entonces, a la expresión 0,3181818... se le llama *decimal infinito periódico* (infinito, por no tener fin, y periódico, por repetirse indefinidamente el grupo de cifras 18). Se admite que dicha expresión es un número, en tanto que representa a 7/22. Se puede escribir, pues,

$$\frac{7}{22} = 0{,}3181818\ldots, \text{ o } \frac{7}{22} = 0{,}3\widehat{18},$$

para abreviar la escritura.

Decimal infinito-periódico. Se da ese nombre a cualquier expresión de la forma $\pm N'abc\ldots mnp\ldots zmnp\ldots zmnp\ldots z\ldots$ donde $\pm N$ es un entero y las cifras *a, b, c, ...,* llamadas *cifras decimales,* acaban formando una secuencia *mnp...z* que se repite indefinidamente y se llama *período.* Dicha expresión se escribe, abreviadamente, así:

$$\pm N'abc\ldots \widehat{mnp\ldots z}.$$

Puede demostrarse que todo número racional se convierte, o bien en un decimal finito, o bien en un decimal infinito periódico (basta seguir el que se ha llamado «método de la división»). Recíprocamente, también todo decimal de uno de esos dos tipos se convierte en un número racional (ver ejercicio A/7-2).

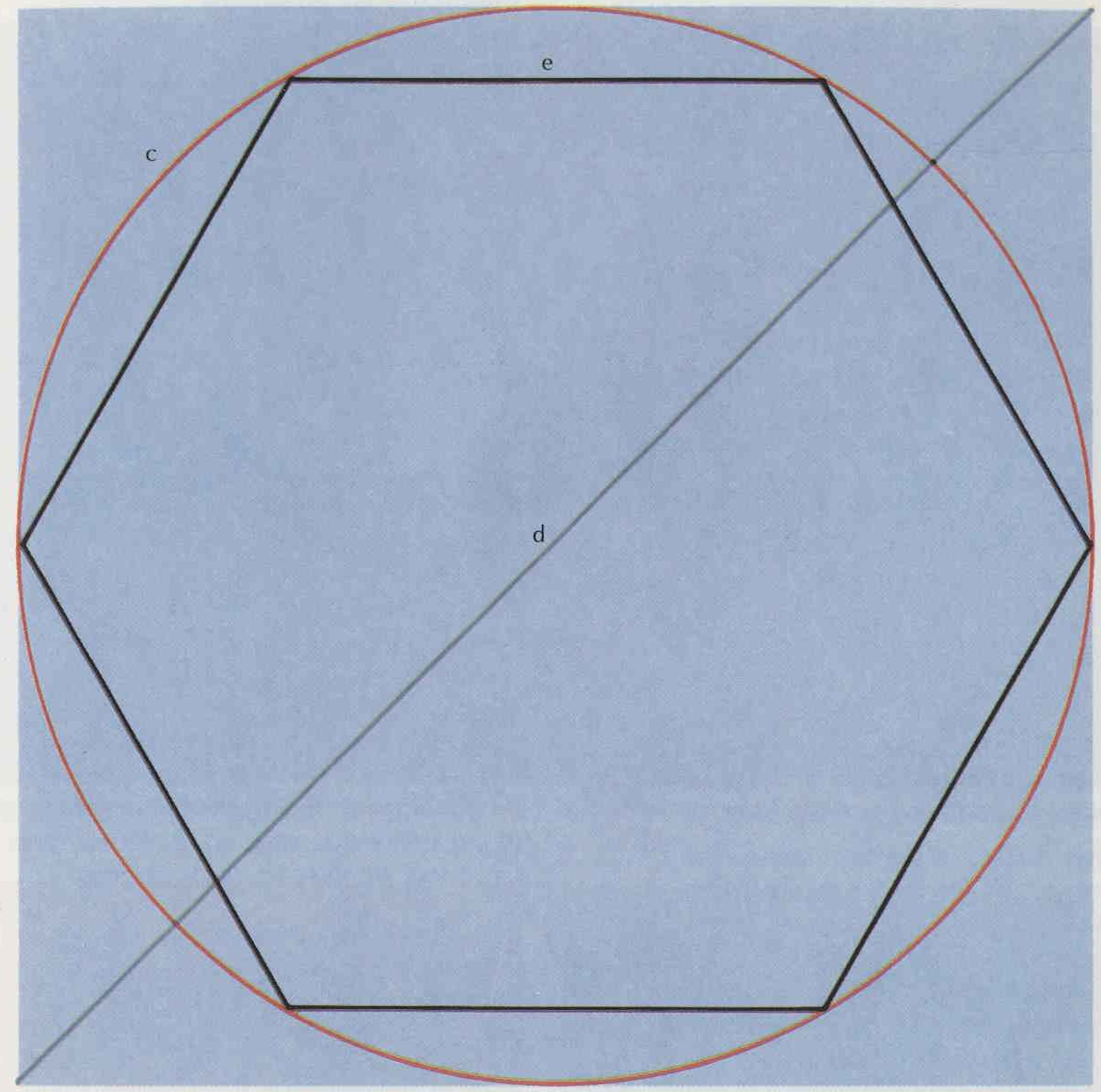


Fig.1 – Segmentos a medir.

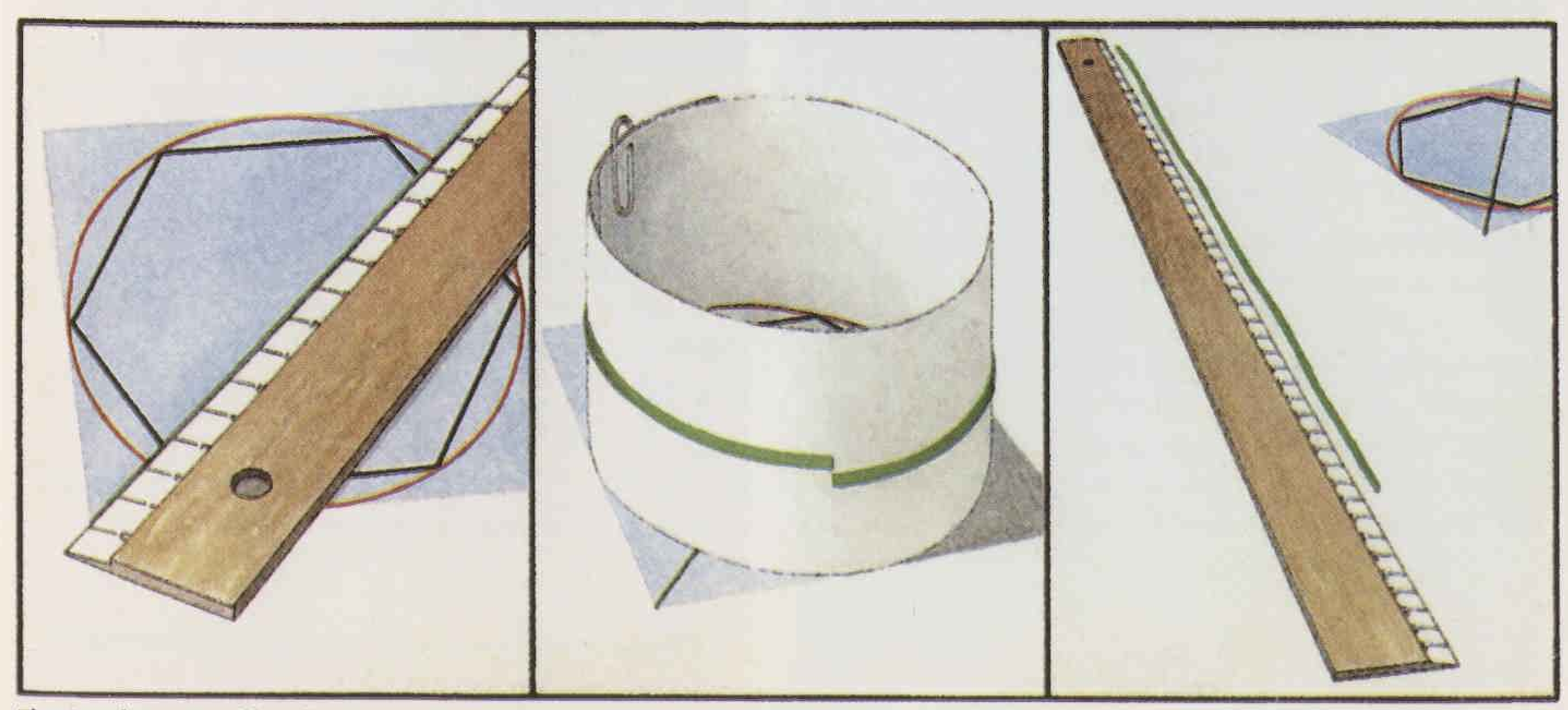


Fig. 2 – d y e se miden directamente utilizando una regla graduada en dm, cm y mm. Para medir c puede buscarse un bote cilíndrico o construir un cilindro cuya base coincida con la circunferencia. Se arrolla en él un hilo y luego se tensa y se mide con la regla.

NÚMEROS REALES

No debe creerse que, dada una unidad de longitud, cualquier otra longitud es expresión racional de ella. Por ejemplo, según el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 debería expresarse con un número que cumpliera $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ es decir, un número cuyo cuadrado fuera 2 (lo llamaremos *raíz cuadrada* de 2, escrito $\sqrt{2}$).
Si fuera $\sqrt{2} = a/b$, con *a* y *b* enteros, debería cumplirse $a^2/b^2 = 2$; eso no es posible, pues los factores primos de la descomposición de a^2 y b^2 están elevados a exponente par y no puede obtenerse el único factor primo 2 al simplificar a^2/b^2. Luego, $\sqrt{2}$ no es racional.
Sin embargo, parece lógico buscar apoximaciones decimales de $\sqrt{2}$, como ya se hizo al medir la diagonal con regla. Como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, probaremos valores decimales de forma 1'... (utilícese calculadora). Se hallará que $1'4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, pues $1{,}4^2 = 1{,}96$ y $1{,}5^2 = 2{,}25$. Probando nuevas cifras, puede llegarse, por ejemplo a $\sqrt{2} \cong 1{,}414213$; pero la expresión 1,414213... no puede tener fin ni ser periódica; será, pues, «infinita-no periódica».

Números reales. Se llama *número real* a cualquier expresión de la forma $\pm N'abcd...$, con $\pm N$ entero, y *a, b, c, d*, ... sucesión finita o no, periódica o no, de cifras decimales. **R** designará el conjunto de los números reales.
Es evidente que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Los reales que no son racionales se llaman irracionales: $\sqrt{2}$ es irracional; también lo es el llamado número «pi», $\pi = 3{,}141519...$ (véase tarjeta B/4).

Representación geométrica de R. Si en una recta se fijan dos puntos O (origen) y U, es posible asignar a cada punto de la misma un único número real (fig. 1); por eso, suele llamarse «recta» a **R** y «puntos» a los reales.

Operaciones y orden en R. Es posible definir en **R** una suma y producto que coinciden con la suma y producto en **Q** cuando se aplican a racionales. Con ellas, **R** es cuerpo conmutativo. También es posible definir una relación de orden en **R** $\leq$ («menor o igual»), que coincide con el orden en **Q** cuando se aplica a racionales. En la tarjeta A/14 se estudia esa relación.

POTENCIA Y RAÍCES EN R. BINOMIO DE NEWTON

Potencias de exponente entero. Si $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ y $z \in \mathbf{Z}$, la potencia es el número representado por a^z y definido como sigue: (1) $a^z = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, «*z* veces», si $z \geq 2$, (2) $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, (3) $a^z = \dfrac{1}{a^{-z}}$, si *z* es negativo (se observará que $-z$ es positivo, luego ya está definido en (1) o (2)).
Para cualesquiera reales no nulos *a* y *b*, y cualesquiera enteros *m* y *n*, se cumple:

(P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (P2) $a^m : a^n = a^{m-n}$
(P3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (P4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
(P5) $(a / b)^m = a^m / b^m$.

Raíces enésimas. Si $a \in \mathbf{R}$ y $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, se llama *raíz enésima* de *a*, escrito $\sqrt[n]{a}$, a cualquier real *r* que cumpla $r^n = a$. Por ejemplo, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, pues $(\pm 2)^4 = 16$; pero, $\sqrt[4]{-16}$ no existe, pues ningún número real, elevado a la cuarta, puede dar resultado negativo.
En la expresión $\sqrt[n]{a}$, *a* se llama *radicando* y *n*, *índice*. Para $n = 2, 3$, las raíces se llaman, respectivamente, *cuadrada* y *cúbica*.
Si *n* es par, existen dos raíces enésimas de *a* si es positivo, y ninguna si es negativo; si *n* es impar existe una sola, en cualquier caso.
Las raíces tienen estas *propiedades:*

(R1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

(R2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

(R3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

(R4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p}$.

Potencias de exponente racional. Si *a* es un real positivo y *m*/*n* racional, se define $a^{m/n}$ como el valor positivo de $\sqrt[n]{a^m}$. Estas potencias tienen las mismas propiedades que las de exponente entero.

Fórmula del Binomio de Newton. En general, $(a + b)^n \neq a^n + b^n$. Multiplicando $a + b$ por sí mismo *n* veces, se deduce la fórmula:

$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n$

donde $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$ son los *llamados números combinatorios* (ver tarjeta A/18).

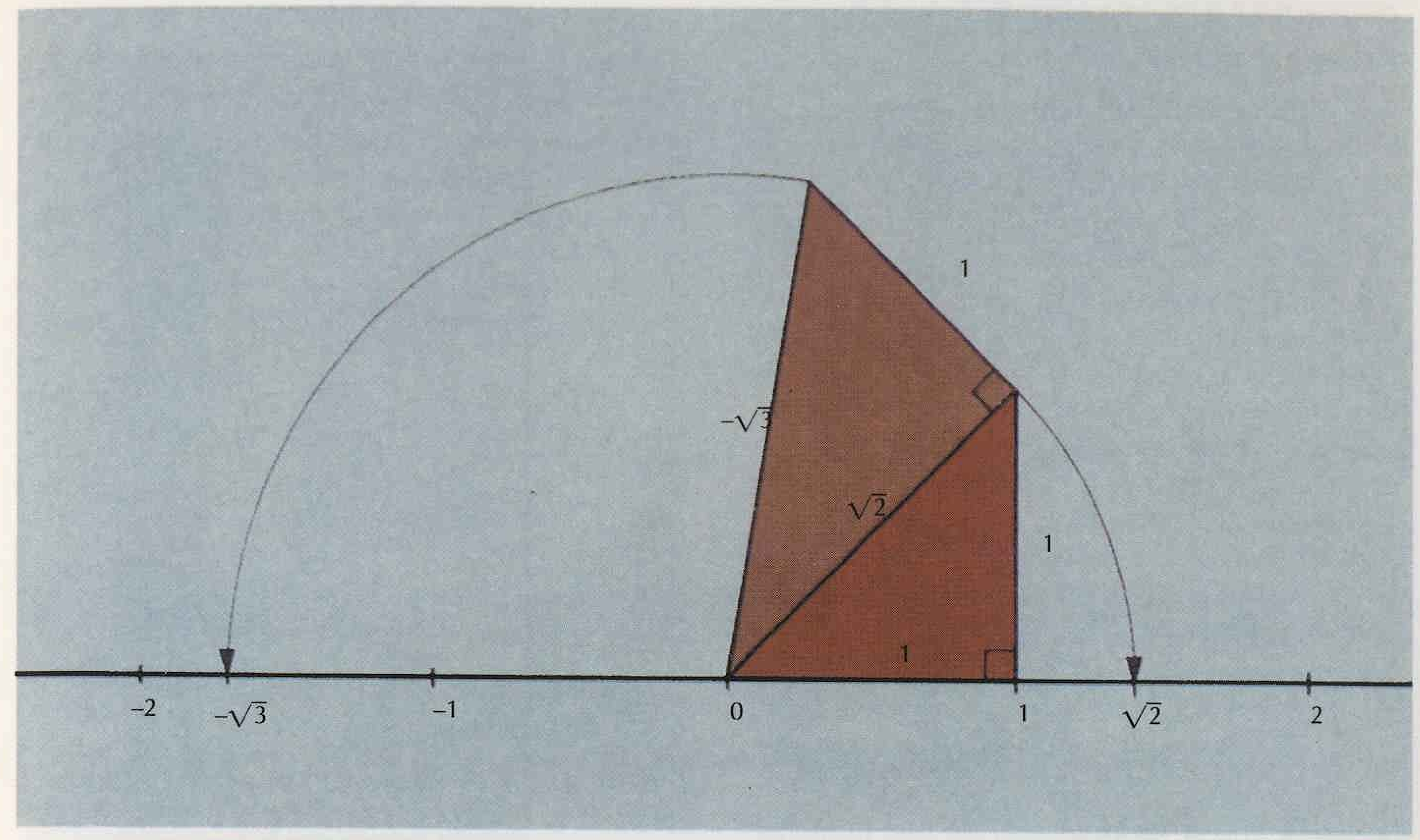


Fig. 1 – Representación sobre una recta de los irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$. Obsérvese que la construcción utiliza el teorema de Pitágoras.

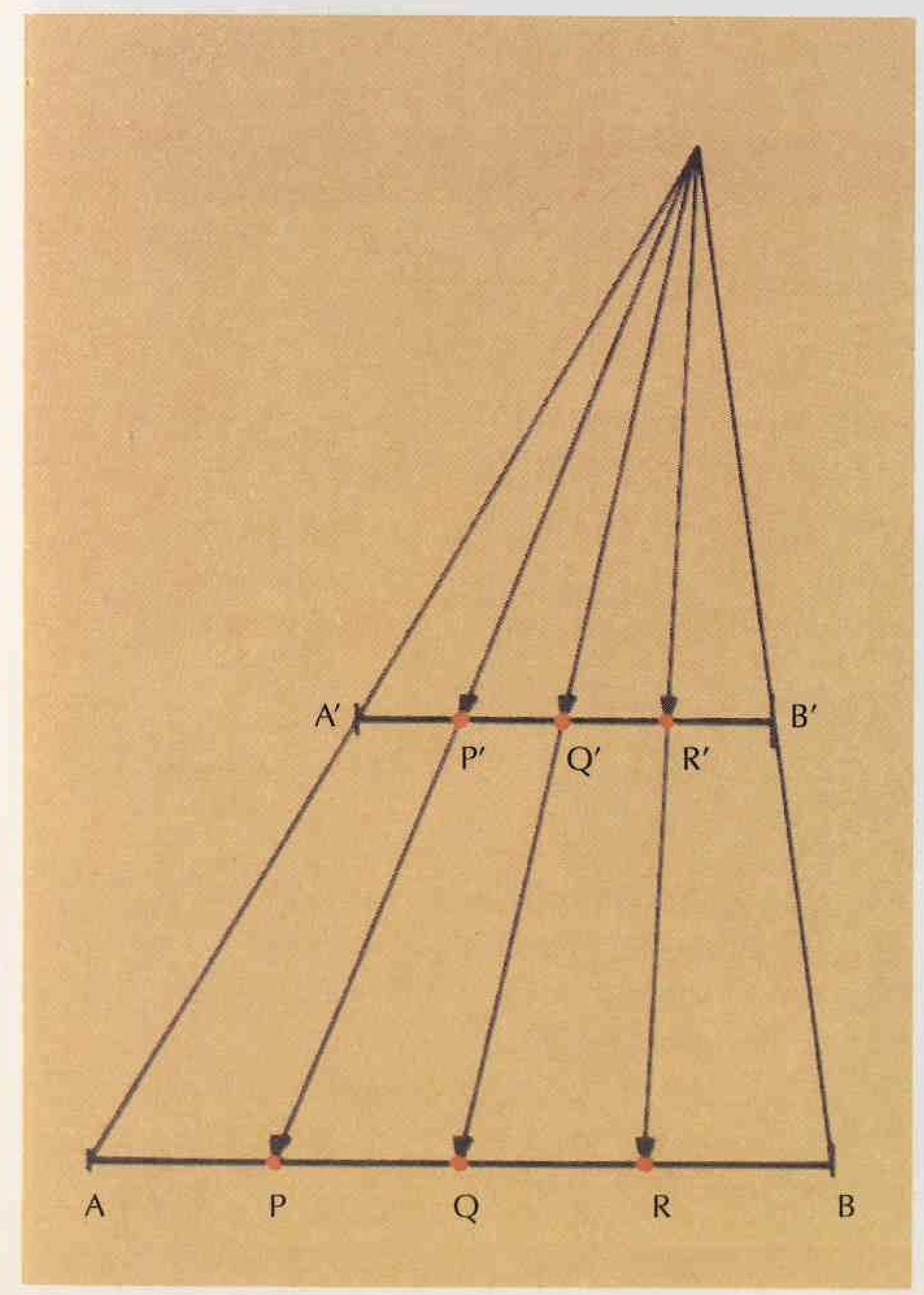


Fig. 2 – Dos segmentos de números reales, aunque sean de distinta longitud, tienen la misma «cantidad» de puntos. La biyección entre ambos está indicada en la figura.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Fig. 3 – En la cuarta fila se hallan los números combinatorios $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$ y sucede lo análogo en cada fila. Cada número es la suma de los dos situados sobre él.

PROPORCIONALIDAD. REGLA DE TRES. INTRODUCCIÓN A LA ARITMÉTICA MERCANTIL

Razones y proporciones

Se llama *razón* de los números *a* (*antecedente*) y *b* (*consecuente*) a su cociente: *a/b*. La igualdad de dos razones es una *proporción:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y *d* se llaman *extremos* y *b* y *c medios;* si los medios son iguales se dice que la proporción es *continua*. La *propiedad característica* de las proporciones es: el producto de los extremos coincide con el de los medios. Asimismo, si se permutan los medios, los extremos, o ambos, la proporción se mantiene.
En toda proporción (y en general en toda serie de dos o más razones iguales), la suma (o diferencia) de los antecedentes es a la suma (o diferencia) de los consecuentes, como cada antecedente es a su consecuente:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \quad , \qquad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} .$$

Se llama *cuarta proporcional* de tres números dados *a*, *b* y *c*, al número *x* tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \ , \ x = \frac{b \cdot c}{a} .$$

Se llama *tercera proporcional* de dos números dados *a* y *b*, al número *x* tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \ , \ x = \frac{b^2}{a} .$$

Se llama *media proporcional* (o *media geométrica*) de dos números *a* y *b*, al número *x* tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad x = \sqrt{a \cdot b}$$

Magnitudes directamente proporcionales. Regla de tres

Dos magnitudes son *directamente proporcionales* si al mutilplicar (o dividir) una cantidad de la primera por un número, queda multiplicada (o dividida), por ese mismo número, la cantidad correspondiente de la segunda. En consecuencia, la razón de cantidades que se correspondan es constante. Es decir, si a_1 y a_2 son cantidades de magnitud *A*, a las que les corresponden, respectivamente, las cantidades b_1 y b_2 de *B*, y *A* y *B* son directamente proporcionales, entonces:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} .$$

La *regla de tres* (*simple* y *directa*) es una regla práctica para calcular b_2, conocidos a_1, a_2 y b_1.

• **Ejemplo.** En el Día del Libro, todos los libros se venden con un descuento del 10% sobre el p.v.p. (precio de venta al público). Calcular el p.c. (precio de coste) de un libro que en dicho día se vendió a 324 ptas., sabiendo que el librero lo compró con un 30% de descuento sobre el p.v.p.
Hemos de calcular el 100% – 30% = 70% del p.v.p., sabiendo que el 100% – 10% = 90% es 324 ptas.

90% ——— 324 pts
70% ——— x

$$x = \frac{70 \cdot 324}{90} = 252 \text{ ptas.}$$

Magnitudes inversamente proporcionales. Regla de tres inversa

Dos magnitudes son *inversamente proporcionales* si al multiplicar (o dividir) una cantidad de la primera por un número, queda dividida (o multiplicada), por ese mismo número, la cantidad correspondiente de la segunda. En consecuencia, el producto de cantidades que se correspondan es constante. Es decir, si a_1 y a_2 son cantidades de la magnitud *A*, a las que les corresponden, respectivamente, las cantidades b_1 y b_2 de *B*, y *A* y *B* son inversamente proporcionales, entonces:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 .$$

La *regla de tres* (*simple* e *inversa*) es una regla práctica para calcular b_2, conocidos a_1, a_2 y b_1.

• **Ejemplo.** Si 12 obreros tardan 30 días para hacer una obra, ¿cúantos obreros harán falta para hacer la misma obra en 6 día menos?

12 obreros ——— 30 días
x ——— 24 días

$$x = \frac{12 \cdot 30}{24} = 15.$$

La *regla de tres compuesta* es una combinación de las reglas de tres directa e inversa, en problemas en los que intervienen tre o más magnitudes. Ver ejercicios.
En las páginas de ejercicios se explican, asimismo, los *repartimientos proporcionales* y la *regla de compañía*.

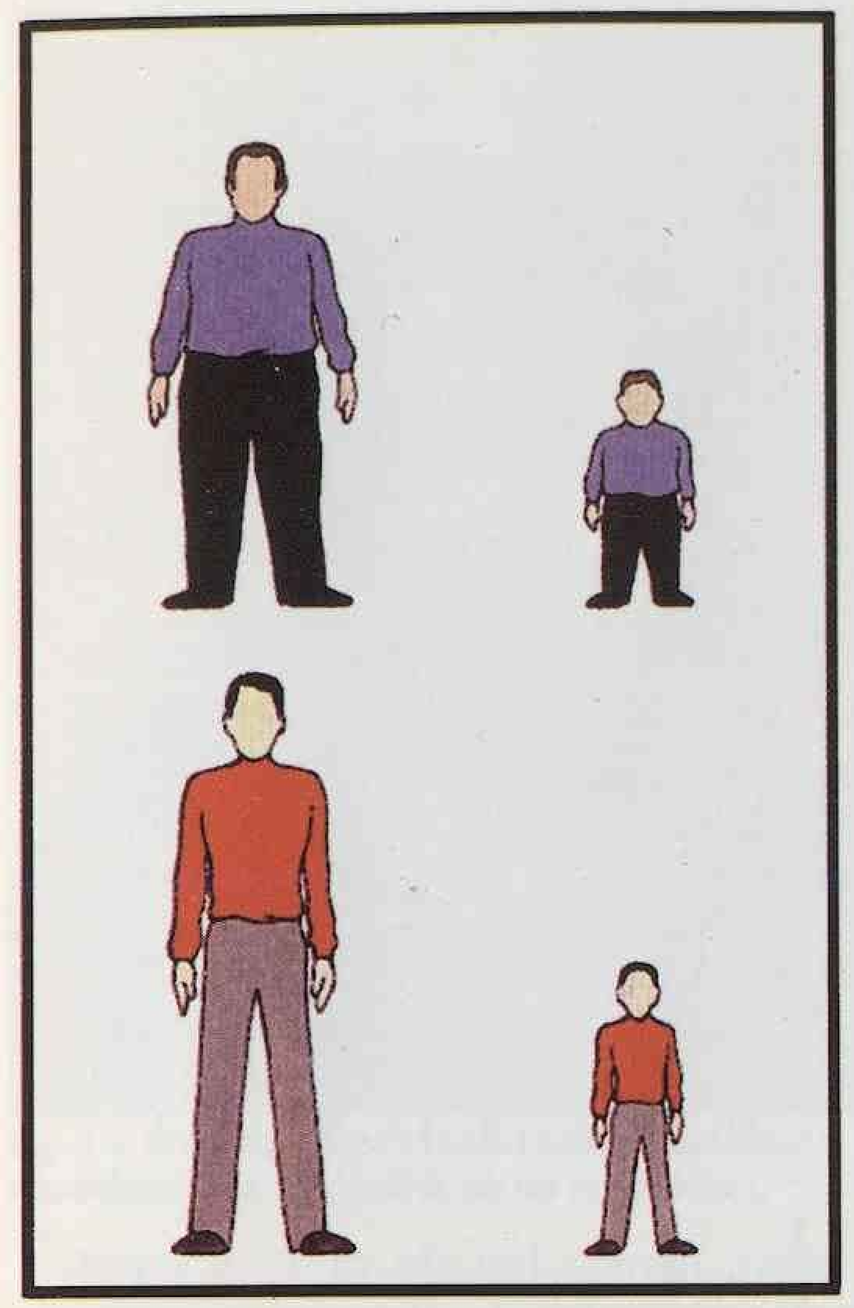


Fig. 1 – El hombre y el niño guardan la misma proporción.

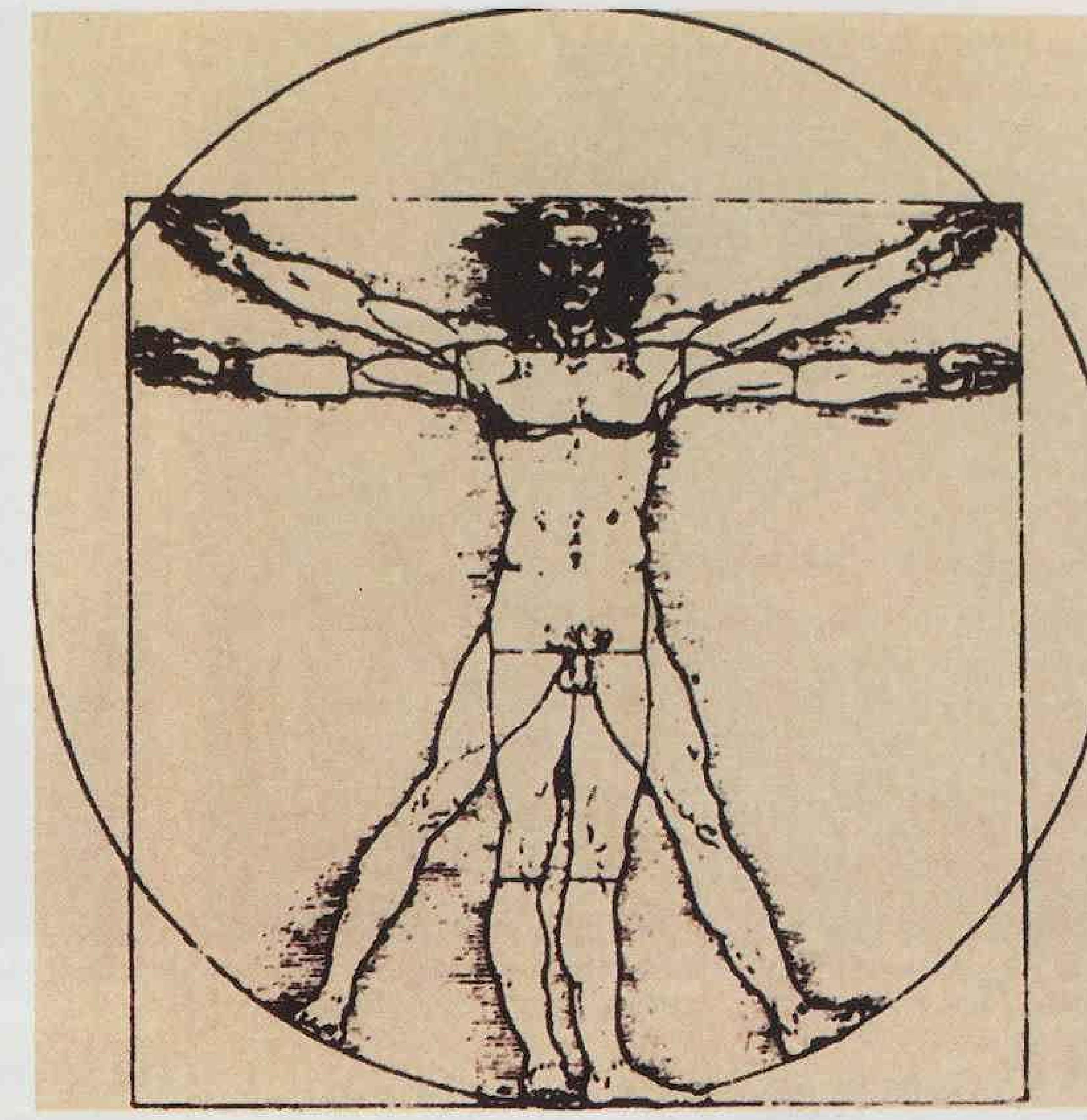


Fig. 2 – Proporciones del cuerpo humano, según Leonardo.

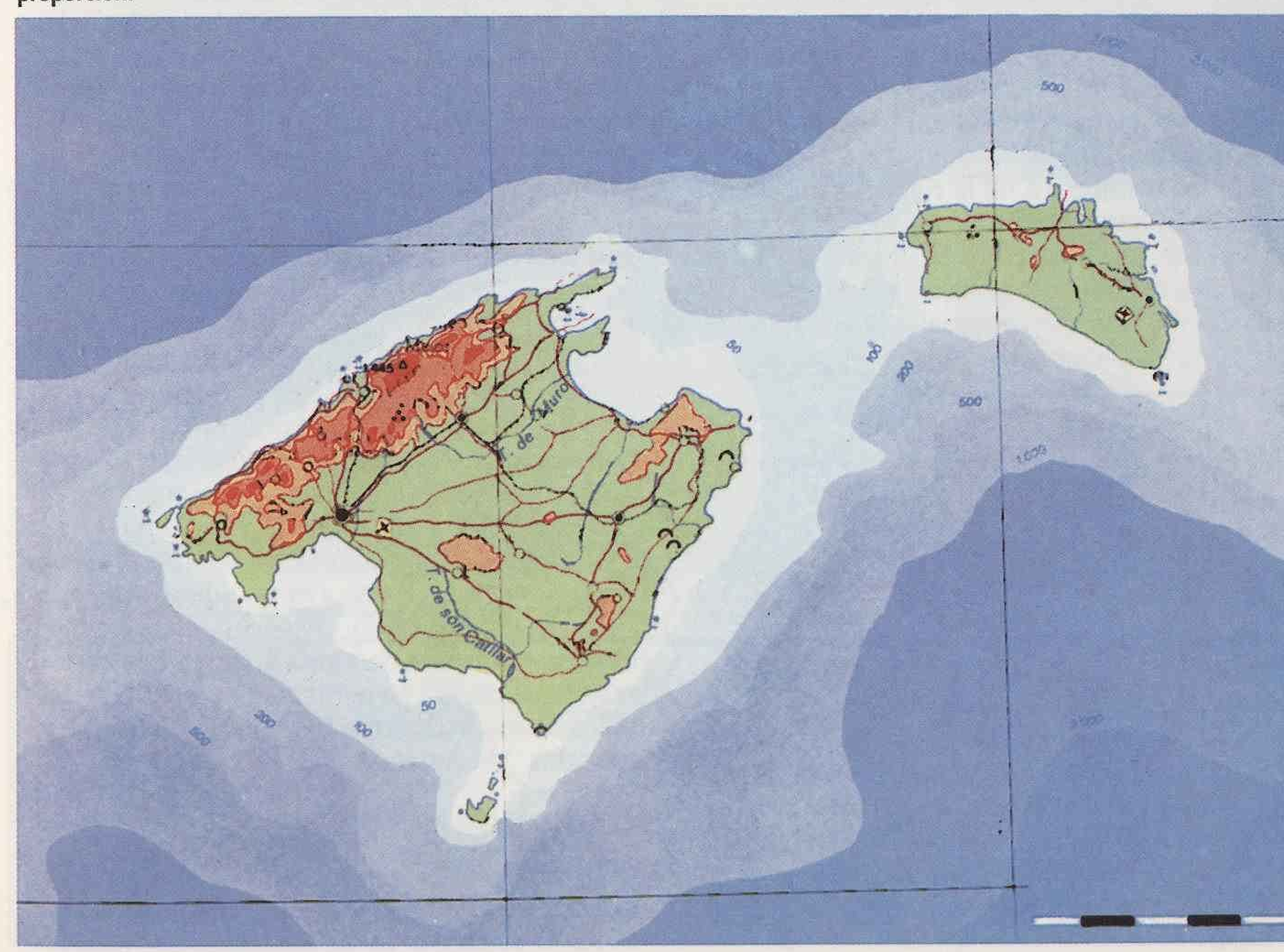


Fig. 3 – La escala es la proporción entre el mapa y la realidad.

POLINOMIOS

Un *polinomio* en la variable x es una suma finita de productos de números (llamados *coeficientes*) por potencias de x (con exponente entero y positivo), más un número que recibe el nombre de *término independiente*. Los sumandos se llaman *términos*. Por ejemplo,

$$p(x) = 3x^4 - x^2 + 6x - 2.$$

El coeficiente de x^2 es –1; el 1 se da por sobreentendido. El coeficiente de x^3 es 0 y por eso no se ha escrito $0x^3$.

El *grado de un término* es el exponente de la potencia de x que contenga; si se trata del término independiente, el grado es cero. Por ejemplo, $3x^4$ es de grado 4 (o de cuarto grado) y $6x$ es de grado 1 (o de primer grado). El *grado del polinomio* es el mayor de los grados de sus términos no nulos. Por ejemplo, $p(x)$ es de grado 4.

La *suma* de polinomios se realiza sumando términos del mismo grado, para lo cual basta sumar los respectivos coeficientes. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} p(x) = & 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 6x - 2 \\ q(x) = & \phantom{3x^4 +{}} 2x^3 - 3x^2 - 10x + 5 \\ \hline p(x) + q(x) = & 3x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

La *resta* de polinomios se realiza sumando el opuesto del sustraendo, para lo cual bastará cambiar de signo todos los términos de éste. El *producto* de polinomios se realiza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación, respecto de la suma y teniendo en cuenta que para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes (por ejemplo, $x^2 \cdot x^3 = x^5$). El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores. Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \\ x^2 - 2x + 5 \\ \hline 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 \phantom{{}+ 6x - 15} \\ - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 6x \phantom{{}- 15} \\ 10x^3 - 15x^2 + 20x - 15 \\ \hline 2x^5 - 7x^4 + 20x^3 - 26x^2 + 26x - 15 \end{array}$$

La *división* de polinomios es similar a la división de números enteros. Se divide el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor (por ejemplo, $8x^5$ dividido por $2x^3$ da $4x^2$); el resultado es el primer término del cociente. A continuación se multiplica dicho resultado por el divisor y el producto se resta del dividento, con lo cual se obtiene un nuevo dividendo. Se repite el proceso para obtener el segundo término del cociente. Y así sucesivamente. La operación se termina al obtener un dividendo de grado menor que el divisor, en cuyo caso dicho dividendo es el resto de la división. Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 8x^5 - 4x^4 - 26x^3 + 2x^2 + 10x - 12 & 2x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} -8x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 12x^2 & 4x^2 + 4x - 5 \\ \cline{1-1} \quad 8x^4 - 22x^3 - 10x^2 & \text{cociente} \\ \quad - 8x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 12x & \\ \cline{1-1} \qquad -10x^3 - 6x^2 - 2x & \\ \qquad 10x^3 - 15x^2 - 5x + 15 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad -21x^2 - 7x + 3 & \text{resto} \end{array}$$

El cociente y el resto han de satisfacer las siguientes propiedades:

(*a*) Dividendo = Divisor · Cociente + Resto

(*b*) grado (Resto) < grado (Divisor) o Resto = 0.

En el caso particular de que el divisor sea un binomio de la forma $x - a$, la división se puede realizar mediante la **regla de Ruffini** que explicamos con un ejemplo: la división de $x^4 - 5x^2 + 6x - 2$ por $x - 3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 6 & -2 \\ 3) & & 3 & 9 & 12 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 18 & \boxed{52} \end{array}$$

En primer lugar, hemos bajado el 1. A continuación hemos multiplicado el 1 por 3, puesto el resultado debajo del 0 y sumado. El resultado lo hemos multiplicado por 3, lo hemos colocado debajo del –5 y hemos sumado. Y así sucesivamente. El último número: 52, es el resto; los demás son los coeficientes del cociente: $x^3 + 3x^2 + 4x + 18$. (Nótese que si, por ejemplo, queremos dividir por $x + 3$, hay que tomar $a = -3$).

Teorema del resto. El resto de una división por $x - a$ es el valor numérico del dividendo para $x = a$. Así, en el ejemplo, el valor numérico del dividendo, para $x = 3$, es 52. La regla de Ruffini permite calcular valores numéricos de polinomios.

Si la división de $p(x)$ por $q(x)$ da resto 0, se dice que es *exacta* y que $p(x)$ es *divisible* por $q(x)$, que $p(x)$ es un *múltiplo* de $q(x)$ y que $q(x)$ es un *divisor* de $p(x)$. Se dice que $p(x)$ es *primo* si sólo es divisible por polinomios de la forma $q(x) = a \cdot p(x)$ o $q(x) = a$, donde a es un número distinto de 0. El estudio de la divisibilidad de polinomios se desarrolla de forma análoga a la de los números enteros; en particular, el m.c.d. de dos polinomios se calcula mediante los mismos métodos. Ver tarjeta A/5.

FRACCIONES POLINÓMICAS

Una *fracción polinómica* es una expresión de la forma $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. El concepto de equivalencia, las propiedades y operaciones son análogas a las de las fracciones numéricas. Ver ejercicios y tarjeta A/13 (ecuaciones fraccionarias).

Fig. 1 – François Viète (1540-1603) (izquierda) y Paolo Ruffini (1765-1822) (derecha), dos matemáticos que hicieron importantes contribuciones a la teoría de las ecuaciones.

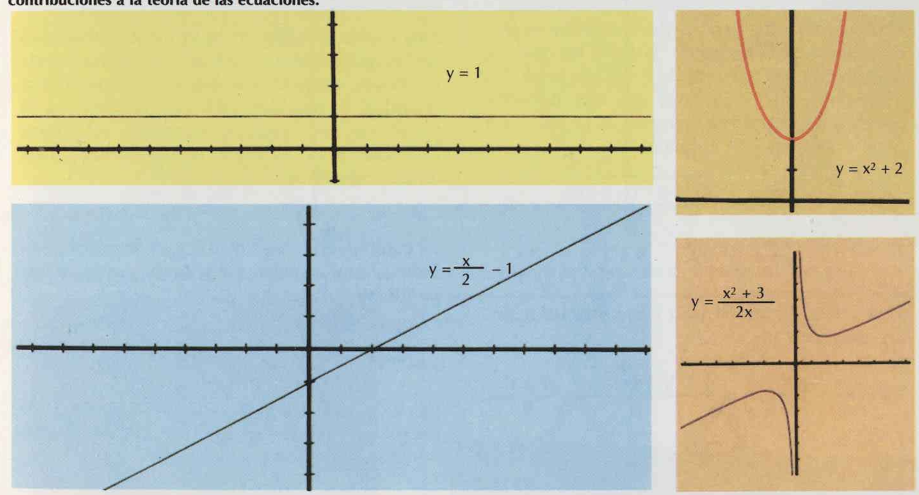


Fig. 2 – Gráficas de algunas funciones polinómicas y racionales.

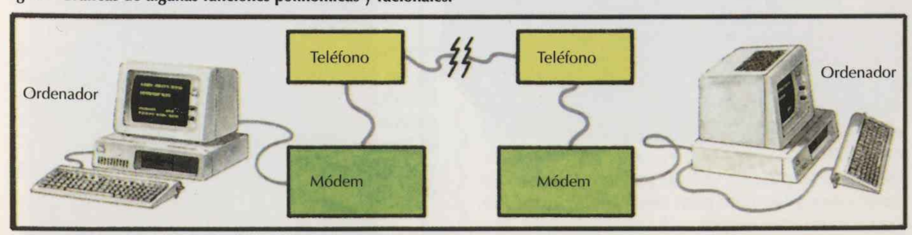


Fig. 3 – Una de las aplicaciones de las funciones polinómicas es la creación de códigos para la transmisión de datos entre ordenadores.

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Una *ecuación* es una igualdad de dos expresiones en las que intervienen variables (llamadas *incógnitas*) cuyo valor se ha de calcular. Por ejemplo, $x + 2 = 5$ es una ecuación (cuya solución es $x = 3$); la expresión que está a la izquierda del signo = se llama *primer miembro* y la que está a la derecha, *segundo miembro*.
Las ecuaciones suelen llevar una serie de operaciones indicadas, que es necesario realizar para resolverlas. Hechas estas operaciones y una vez simplificada la ecuación, si ésta resulta de la forma $ax = b$, donde x es la incógnita y a y b son números ($a \neq 0$), la ecuación es de *primer grado* y su solución es $x = b/a$. Si, en cambio, la ecuación resulta de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) entonces es de *segundo grado* y sus soluciones vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número $\delta = b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante* de la ecuación. Si $\delta > 0$ (es decir, si δ es un número positivo), la ecuación tiene dos soluciones (sus soluciones son dos números reales diferentes). Por ejemplo, si la ecuación es $x^2 + 3x - 10 = 0$, entonces

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} =$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Si $\delta = 0$ la ecuación sólo tiene una solución. Por ejemplo,

$$4x^2 - 4x + 1 = 0,\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Si $\delta < 0$ (es decir, si δ es un número negativo), la ecuación carece de solución en el conjunto de los números reales (tiene dos soluciones, pero son dos números complejos). Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ carece de soluciones reales, porque su discriminante es -4.
Propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado. Sean x_1 y x_2 las soluciones. Entonces $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Estas propiedades se pueden utilizar para comprobar las soluciones y también para resolver mentalmente ecuaciones que tengan soluciones enteras. Por ejemplo, para resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$, bastará encontrar dos números cuyo producto sea 6 y sumen 5; fácilmente encontramos que son 2 y 3.

Consejos prácticos para resolver ecuaciones

Existe una serie de técnicas, bastante conocidas, para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Cuando se carece de la experiencia adecuada, estas técnicas se prestan a errores y confusiones. Por ello, ante cualquier duda, debe uno preguntarse si la modificación que va a realizar se fundamenta en alguna propiedad conocida, como, por ejemplo, las propiedades de las igualdades numéricas y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.
Veamos los casos más frecuentes:
(*a*) Todo término se puede trasladar al otro miembro de una ecuación, cambiándolo de signo. Por ejemplo,

$$3x + 7 = 15 - x \to 3x + 7 + x = 15 \to$$
$$\to 3x + x = 15 - 7 \to 4x = 8 \to x = \frac{8}{4} = 2.$$

Nos hemos basado en la siguiente propiedad de las igualdades numéricas: si se suma o resta un mismo número a ambos miembros de una igualdad, la igualdad subsiste. Por ejemplo, al pasar $-x$ del segundo miembro al primer miembro, implícitamente hemos sumado x en ambos miembros:

$$3x + 7 + x = 15 - x + x \to 3x + 7 + x = 15$$

En cambio, en la siguiente ecuación no es posible trasladar $-x$ al primer miembro, porque hay pendiente una multiplicación:

$$3x + 7 = 2(15 - x) \to 3x + 7 = 30 - 2x \to$$
$$\to 3x + 2x = 30 - 7 \to 5x = 23 \to x = \frac{23}{5}.$$

(*b*) Toda expresión que esté dividiendo a un miembro puede pasar multiplicando al otro miembro. Por ejemplo,

$$\frac{2x + 7}{5} = 3 \to 2x + 7 = 3 \cdot 5 \to$$
$$\to 2x = 15 - 7 \to x = 8/2 = 4.$$

Nos hemos basado en la siguiente propiedad de las igualdades numéricas: si se multiplican los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad subsiste. Así, pasar el 5 multiplicando al segundo miembro, equivale a multiplicar ambos miembros por 5, lo cual es una operación lícita:

$$5 \cdot \frac{2x + 7}{5} = 3 \cdot 5.$$

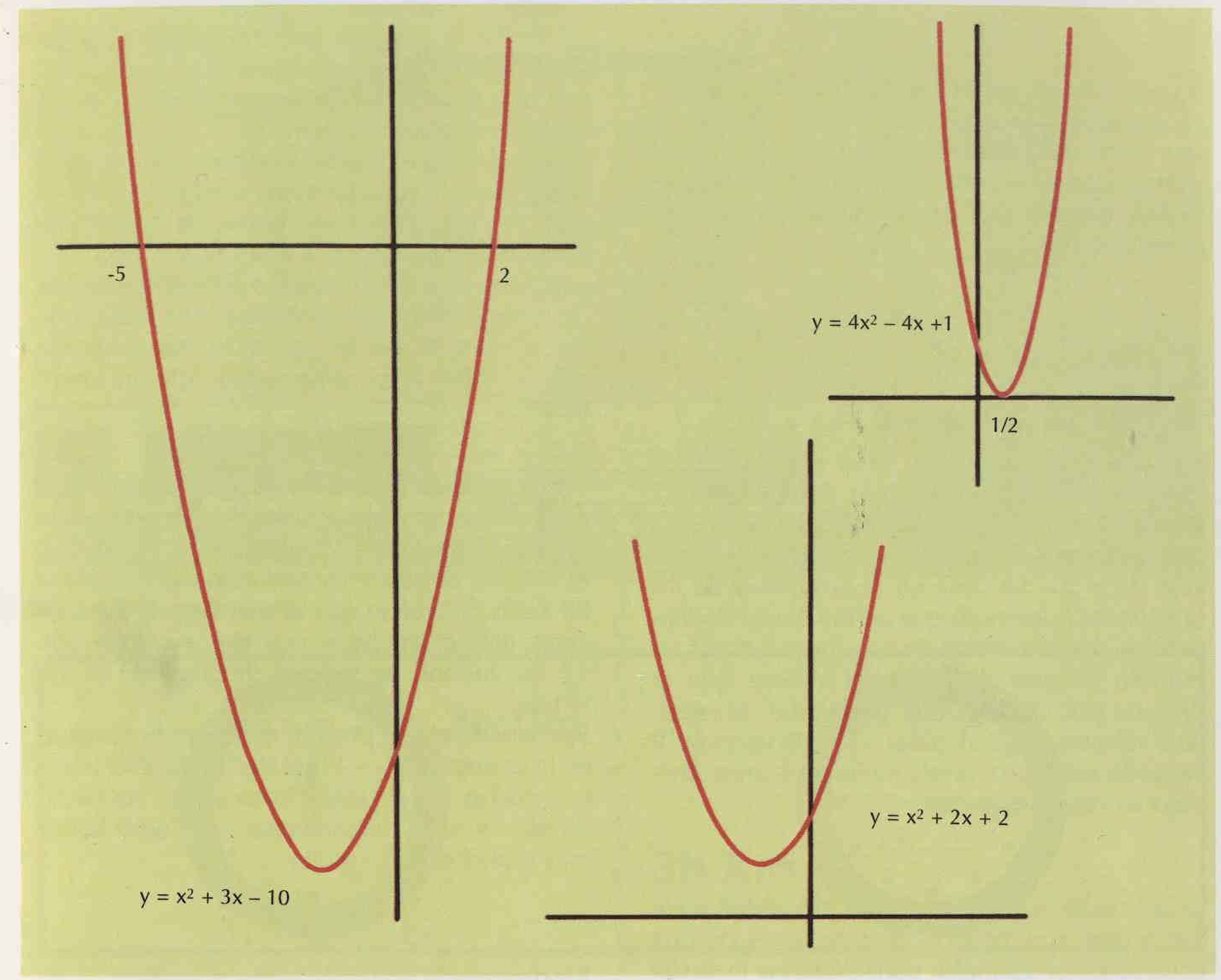


Fig. 1 – La intersección de la parábola con el eje de abscisas da la solución de la ecuación de 2° grado.

Fig. 2 – Leonardo Torres Quevedo (1852-1936).

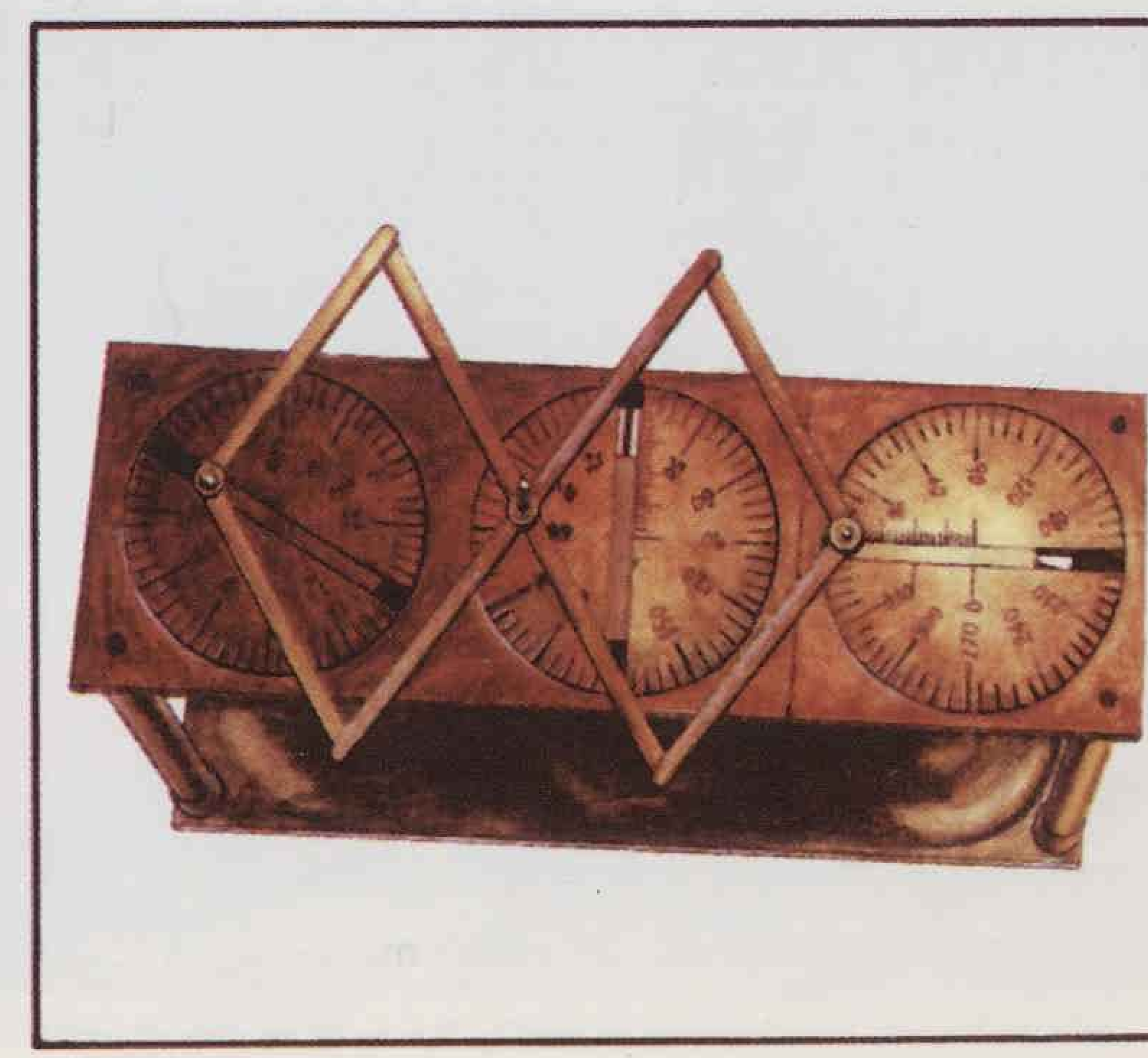


Fig. 3 – Máquina de Torres Quevedo para resolver ecuaciones de 2.° grado con coeficientes complejos.

Sin embargo, en la ecuación

$$\frac{x+1}{2} + x = 11$$

no es posible pasar el 2 multiplicando al segundo miembro, ya que 2 sólo está dividiendo a una parte del primer miembro. Lo correcto es dar previamente común denominador 2 en el primer miembro o, mejor, multiplicar ambos miembros por 2:

$$2 \cdot \left[\frac{x+1}{2} + x\right] = 2 \cdot 11,$$

$$2 \cdot \frac{x+1}{2} + 2 \cdot x = 22,$$

$$x + 1 + 2x = 22 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 21/3 = 7.$$

(*c*) Toda expresión, *cuyo valor sea distinto de cero,* que esté multiplicando a un miembro, puede pasar dividiendo al otro miembro. Es lo que acabamos de aplicar para resolver la ecuación $3x = 21$. Se basa en la propiedad de las igualdades numéricas que afirma que si se dividen los dos miembros de una igualdad por un número distinto de cero (recuérdese que la división por cero no está permitida), la igualdad subsiste. Así, al pasar el 3 dividiendo al segundo miembro, implícitamente hemos dividido ambos miembro por 3:

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}.$$

La aplicación incorrecta de esta propiedad suele dar origen a la pérdida de soluciones de una ecuación. Por ejemplo, consideremos la ecuación $x^2 = 2x$, cuyas soluciones son 0 y 2. Si pasamos la x del segundo miembro dividiendo al primer miembro, resulta $x = 2$; es decir, la solución $x = 0$ se ha esfumado. La incorrección se debe a que hemos dividido por 0, aunque, eso sí, de una forma enmascarada. La ecuación se resuelve correctamente aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado o, mejor, mediante una descomposición en factores:

$$x^2 = 2x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (x-2) = 0.$$

Para que un producto dé 0 hace falta que uno de los factores valga 0, por lo que o bien $x = 0$ (primera solución), o bien $x - 2 = 0$, de donde se obtiene $x = 2$ (segunda solución).

PROBLEMAS

Consejos para resolver problemas

(*a*) Leer bien el enunciado del problema.

(*b*) Identificar la incógnita (o incógnitas) y designarla mediante una letra.

(*c*) Hallar la relación entre la incógnita y los datos, y expresarla en forma de ecuación (si hay más de una incógnita, se necesitan tantas ecuaciones como incógnitas).

(*d*) Resolver la ecuación (o sistema de ecuaciones) y ver si la solución tiene sentido (por ejemplo, si la incógnita x representa un número de personas no puede ser $x = 6/5$ ni $x = -2$).

(*e*) Comprobar si el resultado obtenido satisface las condiciones del problema. No basta una comprobación de la ecuación, ya que ésta podría estar mal planteada, aunque bien resuelta.

• **Ejemplo.** Un tren correo sale de Lleida, con dirección a Tarragona, a las 14:00 y con una velocidad media de 45 km/h. A las 15:20, con el mismo origen y destino, sale un coche a 90 km/h. Sabiendo que el tren llega 4 minutos antes que el coche y que por carretera son 11 km menos, se pide la longitud de la vía férrea.

Sea x la distancia pedida; entonces la longitud de la carretera es $x - 11$. El tren tarda $x/45$ horas y el coche, $(x - 11)/90$. Como el tren ha tardado $80 - 4 = 76$ minutos (que son 76/60 horas) más que el coche, resulta

$$\frac{x}{45} - \frac{x-11}{90} = \frac{76}{60}.$$

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{4x - 2(x-11)}{180} = \frac{3 \cdot 76}{180},\ 2x + 22 = 228,\ x = 103$$

La distancia pedida es 103 km.

• **Ejemplo.** ¿A qué hora, entre las 3 y las 4, se superponen las manecillas del reloj?

Sea x el número de minutos que han de transcurrir, a partir de las 3. En dicho tiempo, el minutero recorre x divisiones (de un total de 60) y el horario $x/12$. Como a las 3 el horario le lleva al minutero una ventaja de 15 divisiones, resulta

$$x - \frac{x}{12} = 15.$$

resolviendo la ecuación resulta $x = 180/11 \simeq$ $\simeq 16{,}363636$, lo que da $3^h\ 16^m\ 21{,}82^s$.

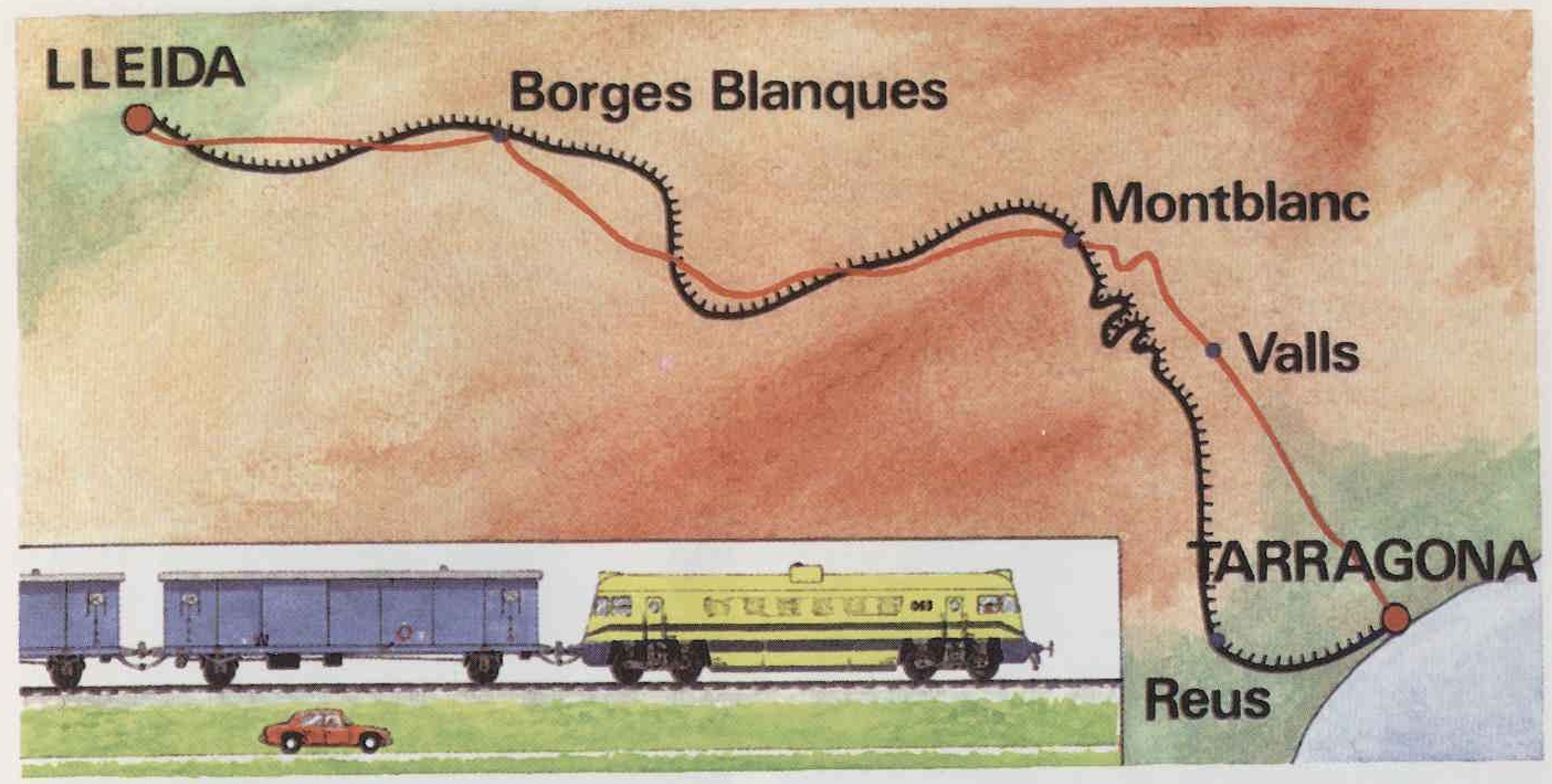


Fig. 1 – Problema de móviles.

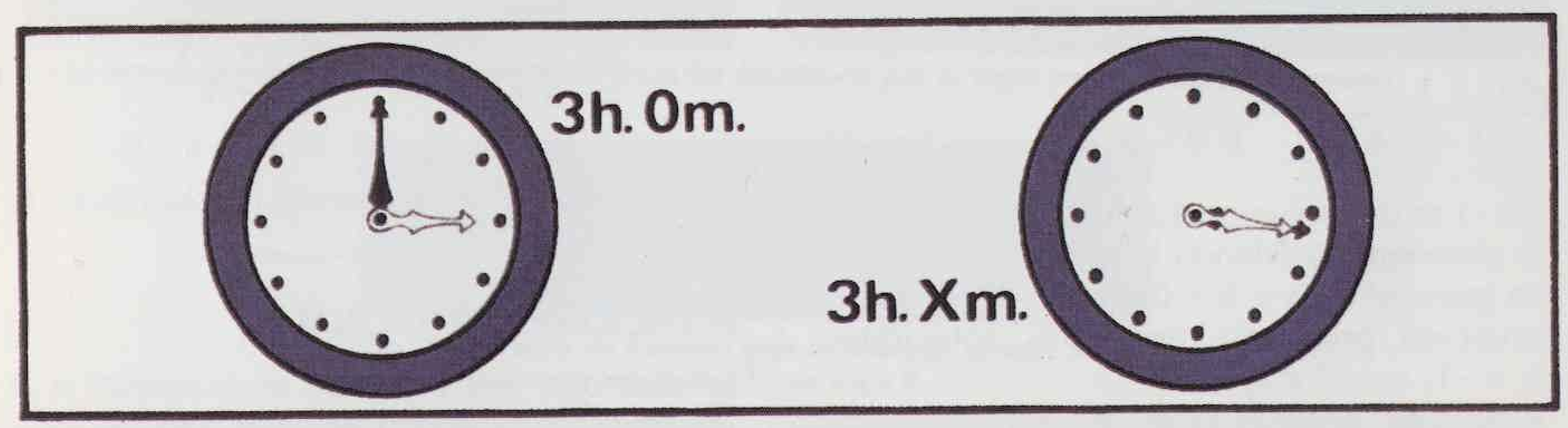


Fig. 2 – Problema de relojes.

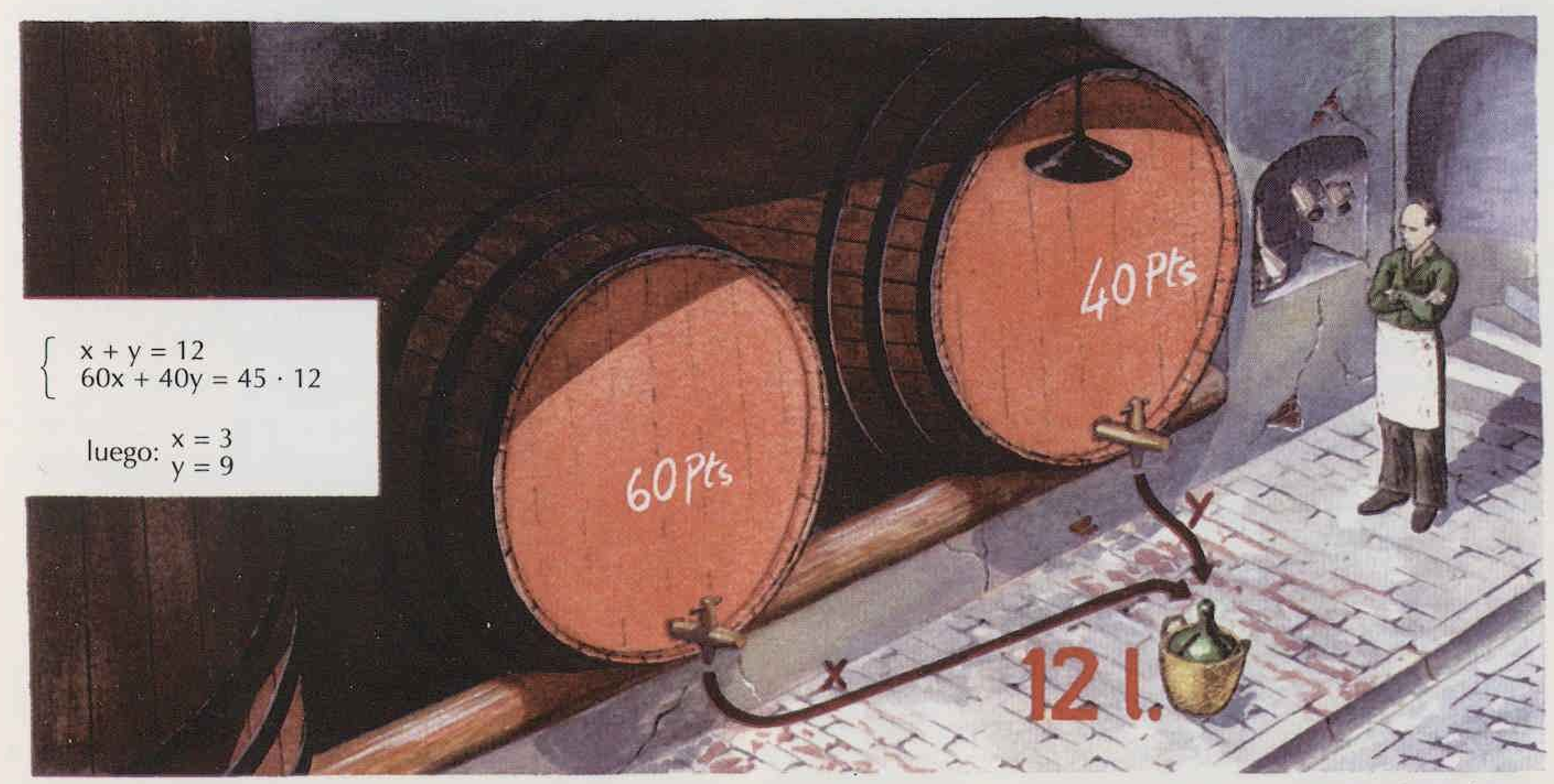


Fig. 3 – Problema de mezclas. El cliente ha pedido 12 litros de vino de 45 ptas./l. ¿Cómo ha de mezclar el dependiente los vinos que tiene?

ECUACIONES POLINÓMICAS

Las *ecuaciones polinómicas*, de grado 3 en adelante, que tengan todos sus coeficientes enteros si tienen soluciones enteras, se resuelven aplicando la regla de Ruffini tanteando divisores del término independiente. Si tienen soluciones racionales, se hallan similarmente, tanteando fracciones irreducibles cuyo numerador sea divisor del término independiente y su denominador divisor del coeficiente del término de mayor grado.

• **Ejemplo.** Las posibles soluciones enteras, si las admite, de la ecuación

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0,$$

son los divisores de 6 : ± 2, ±3 y ±6. Probemos $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1) & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \underline{\lfloor 4} \end{array} \quad x = 1 \text{ no es solución.}$$

Probemos $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1) & & 1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & \underline{\lfloor 0} \end{array} \quad p(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 6),$$

$x = -1$ es una solución. Las restantes soluciones se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$; son 2 y 3. Luego, la ecuación propuesta tiene tres soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.

• **Ejemplo.** Resolver la ecuación $12x^3 + 8x^2 - 13x + 3$.
Para una fracción solución los numeradores posibles son ±1 y ±3, los denominadores posibles son ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, y ±12. Por tanteo se hallan las soluciones $x_1 = 1/3$, $x_2 = -3/3$, $x_3 = 1/2$.

• **Ejemplo.** Resolver la ecuación $x^9 - 4x^6 + x^3 + 6 = 0$
Mediante el *cambio de variable* $y = x^3$ la ecuación se transforma en $y^3 - 4y^2 + y + 6 = 0$, cuyas soluciones, según el ejemplo primero, son $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 3$. Teniendo en cuenta que $y = x^3$, se obtiene $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$ y $x_3 = \sqrt[3]{3}$.

Una *ecuación bicuadrada* es una ecuación de cuarto grado de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

que se resuelve mediante el cambio de variable $y = x^2$.

• **Ejemplo.** Resolver la ecuación $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$.
Haciendo el cambio de variable $y = x^2$ la ecuación se transforma en una de segundo grado

$$y^2 - 12y - 64 = 0.$$

cuyas soluciones son $y_1 = 16$ e $y_2 = -4$. De la primera solución, resulta $x^2 = 16$, de donde se obtiene $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$. De la segunda solución se obtiene $x^2 = -4$, que no proporciona más soluciones de la ecuación propuesta.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Las *ecuaciones fraccionarias* se resuelven dando común denominador, para así transformarlas en una ecuación polinómica. Es muy importante comprobar las soluciones obtenidas.

• **Ejemplo.** Resolver la ecuación

$$x + \frac{1}{x + 1} = 1.$$

Demos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{x(x + 1) + 1}{x + 1} = 1\,, \quad \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = 1,$$

$$x^2 + x + 1 = x + 1,\ x^2 = 0,\ x = 0.$$

Luego, la ecuación sólo admite la solución $x = 0$.

ECUACIONES IRRACIONALES

Se dice que una ecuación es *irracional* si la incógnita figura dentro de algún radical. Estas ecuaciones se resuelven aislando en un miembro una de las raíces y elevando al cuadrado ambos miembros, si la raíz es cuadrada, al cubo si es cúbica, y en general al índice de la raíz. El proceso se repite cuantas veces sea menester, hasta que hayan desaparecido los radicales. Hecho esto, se resuelve la ecuación obtenida, cuya solución (o soluciones) hay que comprobar en la ecuación original, pues es posible que al elevar a potencias los miembros se hayan introducido soluciones extrañas.

• **Ejemplo.** Resolver la ecuación $x + \sqrt{x} = 6$.
Aislemos $\sqrt{x}$ en el primer miembro y elevemos los dos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x} = 6 - x \to (\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \to$$
$$\to x = 36 - 12x + x^2 \to x^2 - 13x + 36 = 0.$$

Las soluciones de esta última ecuación son 9 y 4. La solución $x = 9$ no satisface la ecuación propuesta, pues $9 + \sqrt{9} = 12 \neq 6$; en cambio $x = 4$ sí la satisface; $4 + \sqrt{4} = 6$. Luego, la única solución de la ecuación es $x = 4$.

Niccoló Fontana (llamado Tartaglia) (1499-1557).

Gerolamo Cardano (1501-1576).

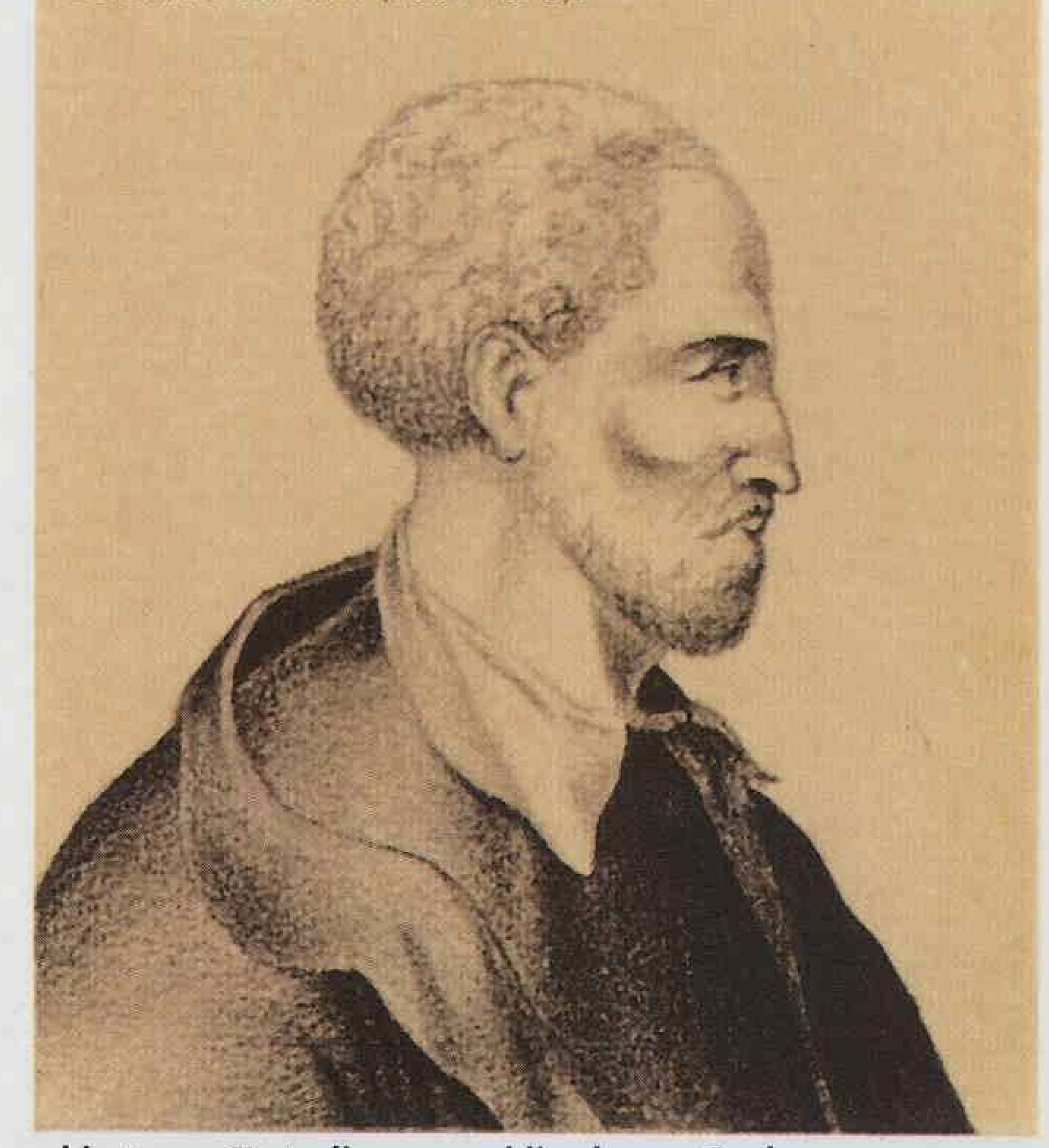
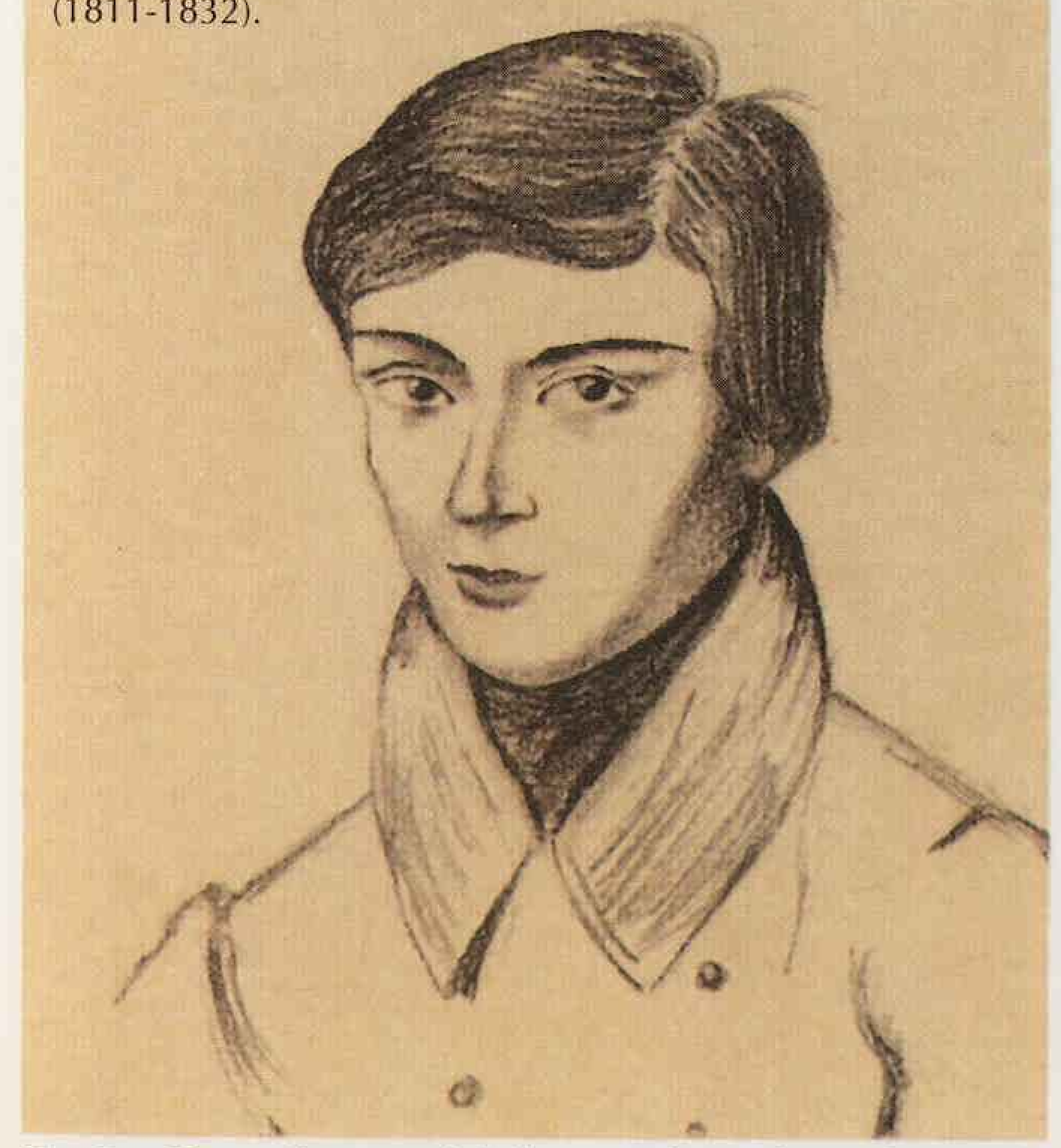


Fig. 1 – La fórmula general de la ecuación de tercer grado fue descubierta por Tartaglia pero publicada por Cardano.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Fig. 2 – Fórmula de Cardano para la ecuación general de 3.^{er} grado previamente expresada $x^3 + px + q = 0$.

Evariste Galois (1811-1832).



Niels Henrik Abel (1802-1829).

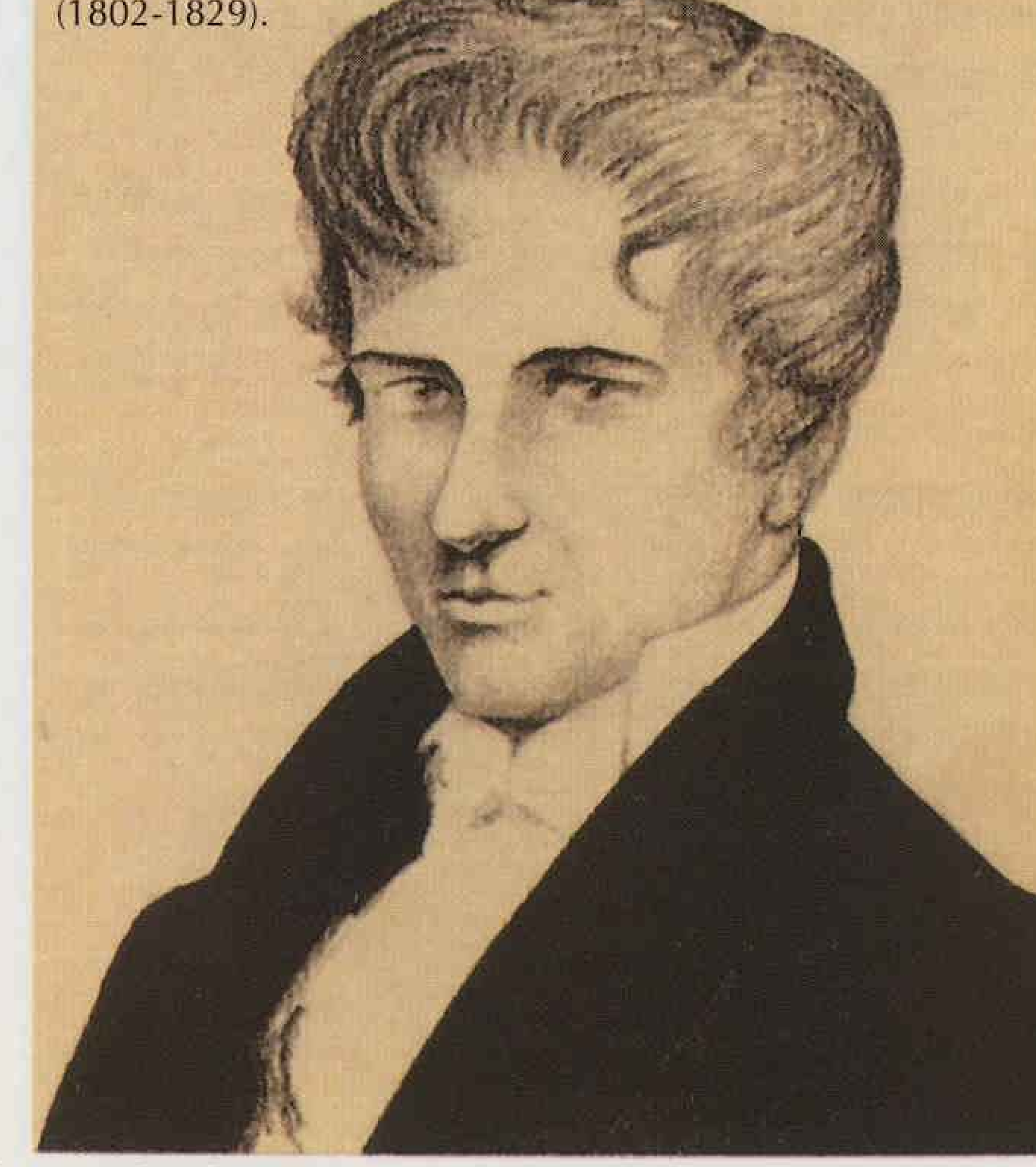


Fig. 3. – El estudio general de las ecuaciones de grado superior fue completado por Ferrari, Galois y Abel.

SISTEMAS DE PRIMER GRADO

Hay tres métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción.

El *método de sustitución* consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra, a fin de obtener una ecuación con una sola incógnita.

- **Ejemplo.** Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

Despejemos y en ambas ecuaciones e igualemos los resultados:

$y = 15 - 3x \rightarrow 2x - 3(15 - 3x) = -1 \rightarrow$
$\rightarrow 2x - 45 + 9x = -1 \rightarrow 11x = 44 \rightarrow x = 44/11 = 4.$

Entonces, $y = 15 - 3x = 15 - 3 \cdot 4 = 3$. Luego, la solución del sistema es $x = 4$ e $y = 3$.

El *método de igualación* consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones e igualar los resultados.

- **Ejemplo.** Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$

Despejemos y en ambas ecuaciones e igualemos los resultados:

$$y = \frac{9 - 4x}{3} \quad , \quad y = \frac{2x - 11}{5} ,$$

$$\frac{9 - 4x}{3} = \frac{2x - 11}{5} \rightarrow 5\,(9 - 4x) = 3\,(2x - 11)$$

$45 - 20x = 6x - 33 \rightarrow 26x = 78,\ x = 78/26 = 3$

Para calcular y, sustituimos $x = 3$ en cualquiera de las igualdades obtenidas: $y = (9 - 4 \cdot 3)/3 = -1$.

El *método de reducción* consiste en sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, multiplicándolas por números convenientes cuando haga falta, de manera que al efectuar la suma se elimine una de las incógnitas.

- **Ejemplo.** Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x + 5y = 33 \\ 8x - 7y = -19 \end{cases}$

Para eliminar la incógnita x, podemos multiplicar la primera ecuación por -2 (para eliminar y, habría que multiplicar la primera por 7 y la segunda por 5):

$$\begin{array}{r} -8x - 10y = -66 \\ 8x - \ \ 7y = -19 \\ \hline -17y = -85 \end{array} \quad \rightarrow y = \frac{-85}{-17} = 5.$$

Para calcular x, sustituimos y por 5 en una de las ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$4x + 5 \cdot 5 = 33,\ 4x = 8,\ x = 8/4 = 2.$$

Los *sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas* se reducen a uno de dos ecuaciones con dos incógnitas aplicando cualquiera de los métodos anteriores. El más utilizado es el de reducción.

- **Ejemplo.** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 4y - 5z = -16 \\ -3x + 3y + 2z = 15 \end{cases}$$

Sumemos la primera ecuación multiplicada por -2 a la segunda y multiplicada por 3 a la tercera, a fin de eliminar la incógnita x:

$$\begin{cases} x + 2y + \ 3z = 4 \\ -8y - 11z = -24 \\ 9y + 11z = 27 \end{cases}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones se elimina z y resulta $y = 3$. Sustituyendo este valor en la tercera ecuación se obtiene $z = 0$. Finalmente, sustituyendo los dos valores hallados en la primera ecuación, se obtiene $x = -2$.

SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO

Los *sistemas de segundo grado* presentan una gran diversidad de casos. Generalmente se resuelven empleando el método de sustitución, a fin de obtener una ecuación con una incógnita.

- **Ejemplo.** Resolver el sistema: $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$

De la primera ecuación se obtienen $y = 8 - x$; sustituyendo en la segunda resulta:

$$x(8 - x) = 15,\ x^2 - 8x + 15 = 0,$$

cuyas soluciones son $x_1 = 5$ y $x_2 = 3$. Los valores de y correspondientes son $y_1 = 8 - 5 = 3$ e $y_2 = 8 - 3 = 5$.

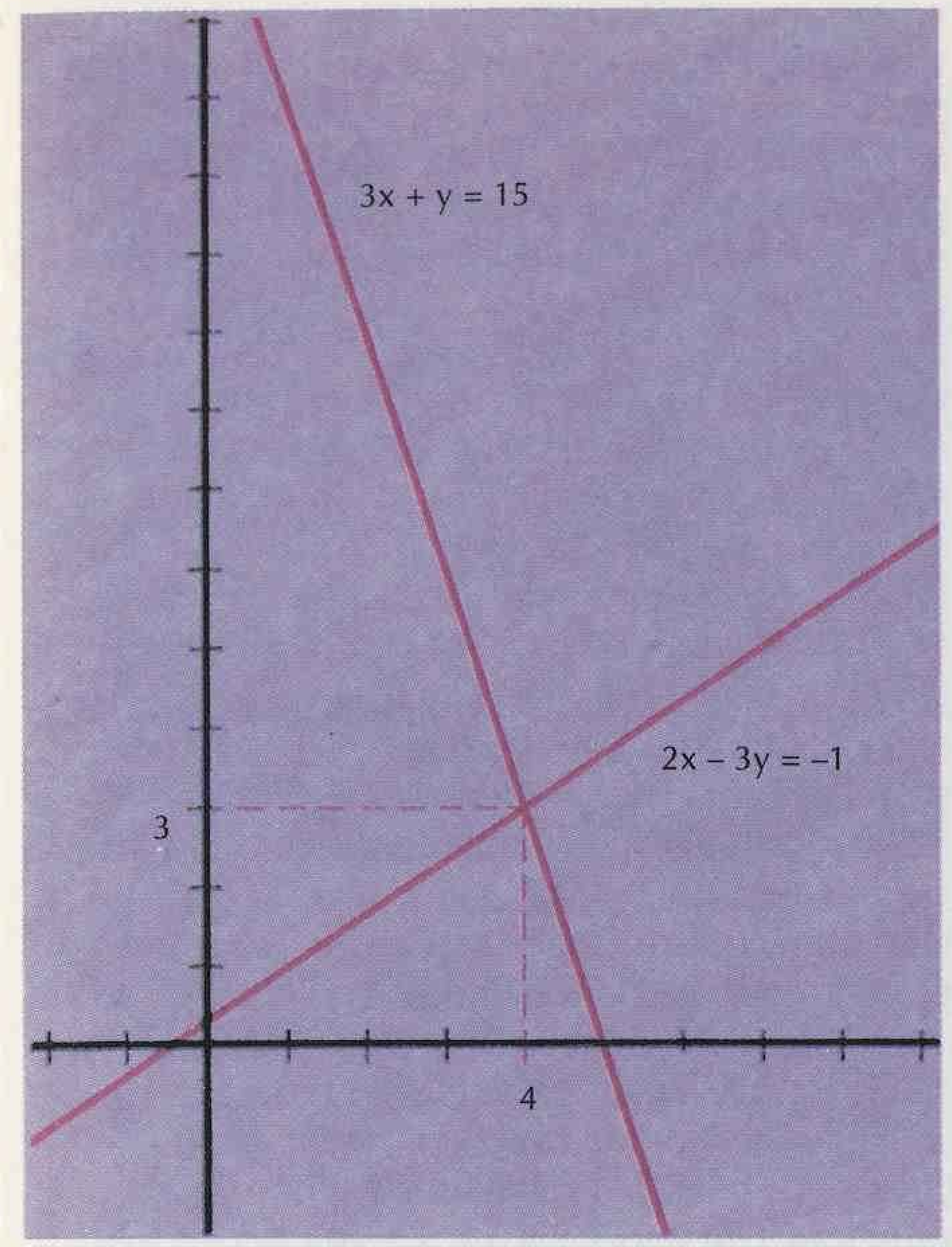


Fig. 1 – Sistema de 1.er grado de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

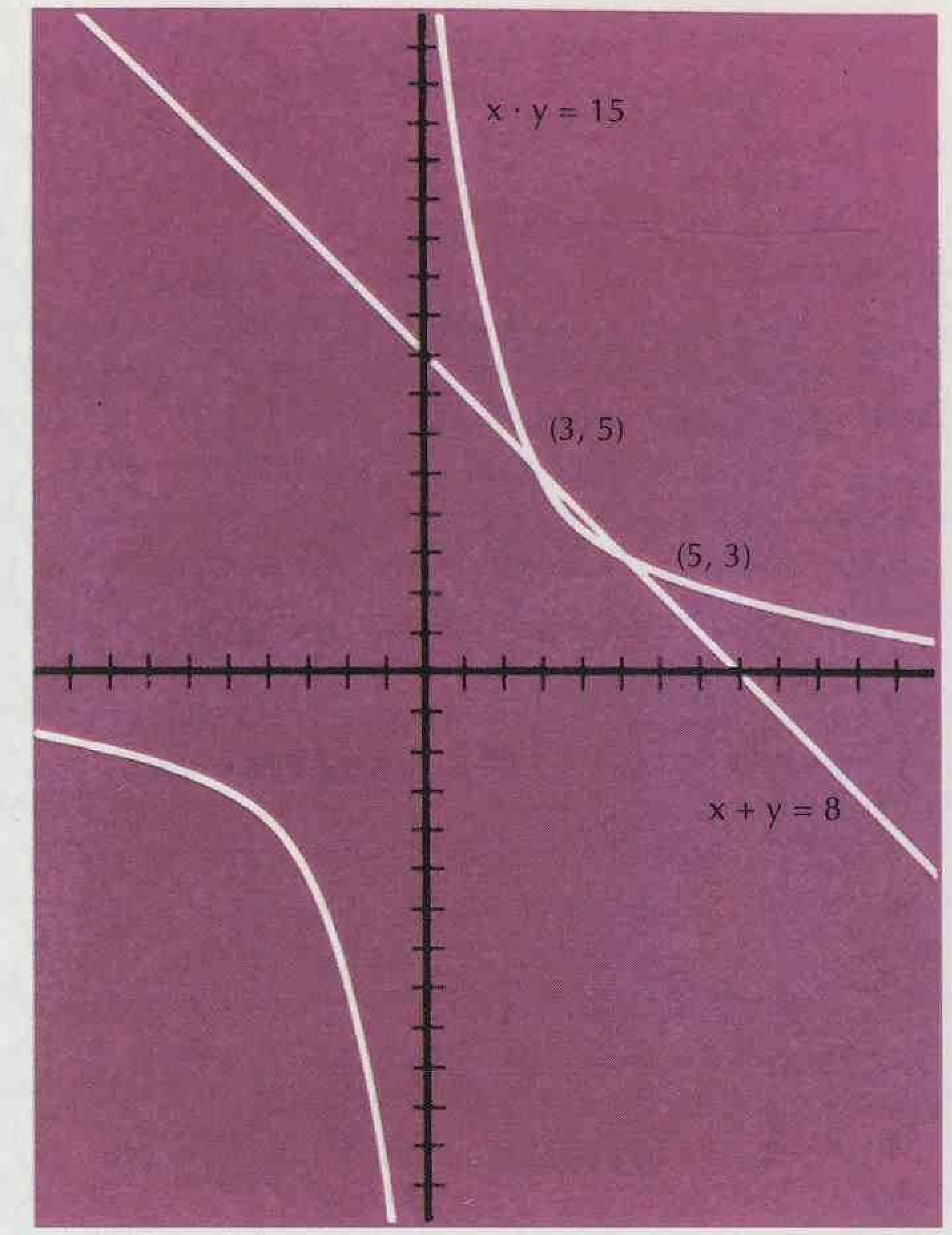


Fig. 2 – Sistema de 2.° grado.

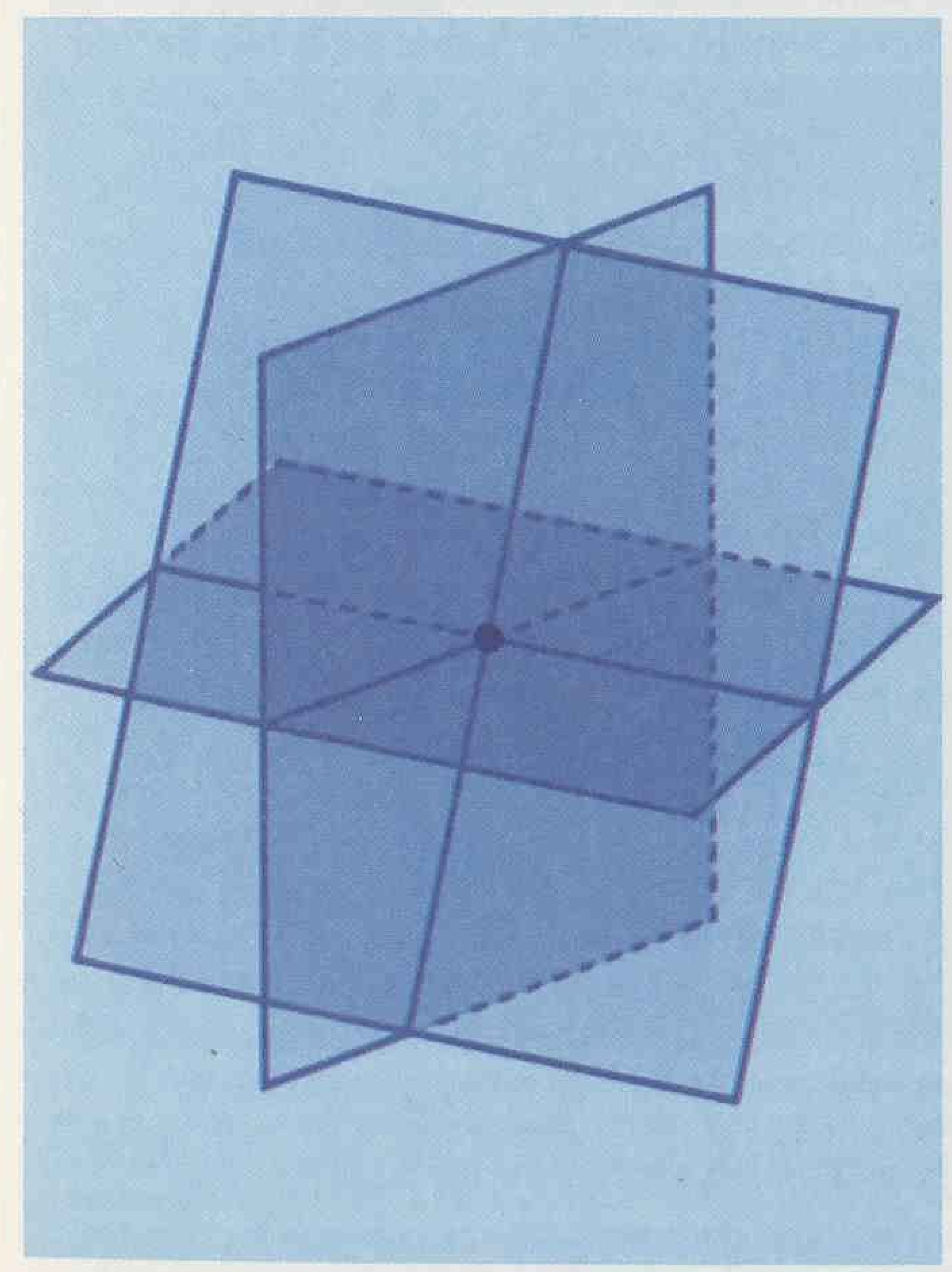


Fig. 3 – Un sistema de 1.er grado de 3 ecuaciones con 3 incógnitas corresponde a la intersección de 3 planos.

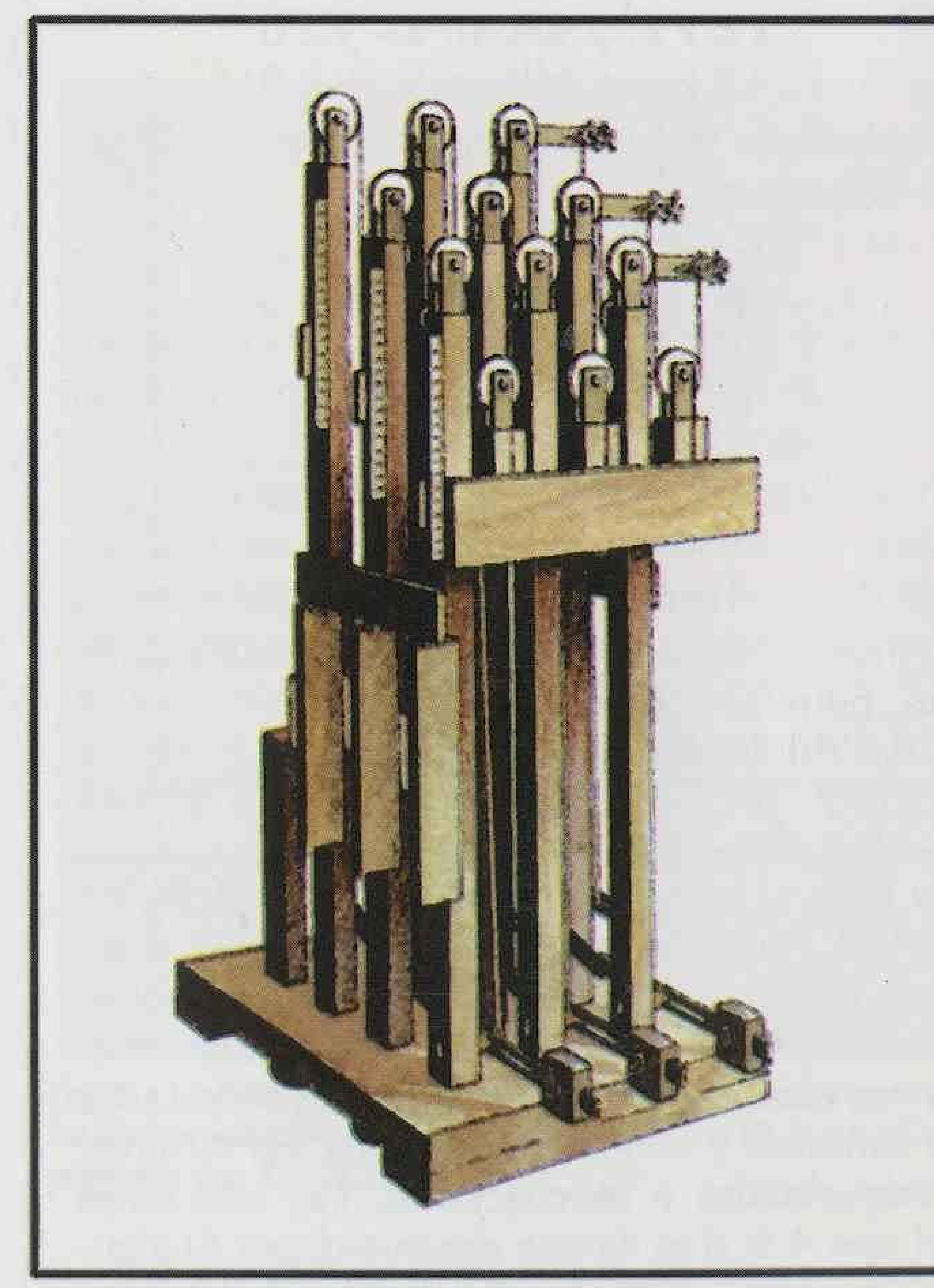


Fig. 4 – Polipasto algébrico de Paulí Castells i Vidal para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

INECUACIONES

Reales positivos y negativos. $\mathbf{R^+}$ y $\mathbf{R^-}$ representarán, respectivamente, el conjunto de los reales positivos (los que llevan signo «más» en su representación decimal) y el de los negativos (los que llevan signo «menos»). Todo número real es positivo, negativo o nulo, y sólo una de estas tres cosas. El opuesto de un positivo es negativo, y recíprocamente. Dos números inversos son ambos positivos o ambos negativos.

Si $\oplus$ y $\ominus$ representan un positivo y un negativo cualesquiera, se cumplen estas *reglas de los signos:* (Suma) $\oplus + \oplus = \oplus$, $\ominus + \ominus = \ominus$, (Producto) $\oplus \cdot \oplus = \oplus$, $\oplus \cdot \ominus = \ominus$, $\ominus \cdot \ominus = \oplus$.

Orden de R. Dados dos números reales x e y, escribiremos $x > y$, y leído «*x es mayor que y*», si $x - y$ es positivo; pero, si $x - y$ es negativo, entonces escribiremos $x < y$, leído «*x es menor que y*». Dicho de otro modo, $x > y$ si $x - y \in \mathbf{R^+}$; $x < y$ si $x - y \in \mathbf{R^-}$.

Escribiremos $x \geq y$, leído «*x es mayor o igual que y*», si $x > y$ o $x = y$. Análogamente se define $x \leq y$ («*x es menor o igual que y*»).

Las relaciones $\geq$ y $\leq$ son de orden total, y recíprocas, esto es, $x \geq y$ equivale a $y \leq x$.

«Real positivo» equivale a «mayor que cero» y «real negativo», a «menor que cero»; por eso,

$$x \geq y \text{ si, y sólo si, } x - y \geq 0$$
$$x \leq y \text{ si, y sólo si, } x - y \leq 0$$

Propiedades del orden en R. Interesa destacar las siguientes:

(I) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ y $x - z \leq y - z$, para cualquier $z \in \mathbf{R}$.

(II) Si $x \leq y$, entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$ para cualquier $z \in \mathbf{R^+}$; pero, $x \cdot z \geq y \cdot z$ si $z \in \mathbf{R^-}$ (lo mismo sucede con x/z e y/z).

Otros aspectos interesantes del orden en R son éstos: no existe el «siguiente» de un número real dado, ni puede hablarse de números reales «consecutivos». Ello se debe a que entre cada dos números reales distintos siempre existe otro, distinto de ambos. Por ejemplo, entre 2 y 2,1 está 2,01 (hay otros); entre 2,1 y 2,01 está el 2,001 (hay otros); etc.

Por ello, al hablar de conjuntos tales como «el de los números reales comprendidos entre otros dos» o «el de números reales mayores (o menores) que otro dado», es imposible enumerar sus elementos. A tales conjuntos se les asigna símbolos y nombres especiales (ver lámina).

Desigualdades e inecuaciones. Las relaciones del tipo $A \lesseqgtr B$ se llaman *desigualdades.* Si alguno de los miembros de una desigualdad contiene una o varias variables, diremos que es una *inecuación* y que las variables son las *incógnitas* de la misma. Por ejemplo, $3x + 4y < 5y - 2$ es una inecuación con dos incógnitas, x e y.

Una *solución* de una inecuación está formada por un valor para cada incógnita, de modo que al sustituir éstas por los valores asignados, la desigualdad se cumple. Por ejemplo, $(x, y) = (1, 6)$ es solución de $3x + 4y < 5y - 2$, pues al sustituir se obtiene $27 < 28$, que es cierto; pero $(x, y) = (1, 3)$ no es solución, pues al sustituir se obtiene $15 < 13$, que no es cierto.

Resolver una inecuación consiste en hallar todas sus soluciones. Vamos a ver cómo se resuelven algunos casos.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita. Tales inecuaciones se resuelven «despejando la incógnita», igual que se hace con las ecuaciones de primer grado, o sea, suprimiendo paréntesis, transponiendo y agrupando términos, etc; pero hay que tener cuidado con esto: al transponer factores o divisores, o cambiar de signo los dos miembros, si el número por el que se ha de multiplicar o dividir los dos miembros de la inecuación es negativo, se ha de cambiar < por > en el paso correspondiente, según la propiedad (II) del orden en **R**.

En general, estas inecuaciones conducen a soluciones de tipo $x < a$ o $x > a$, por lo que existen infinitas soluciones: todos los reales de cierta semirrecta, que se denomina *conjunto solución* o, simplemente, *solución* de la inecuación (ver ejercicio A/14-2).

Es corriente encontrarse con sistemas de dos o más inecuaciones con una incógnita, cuya solución es, naturalmente, la intersección de los conjuntos solución de cada una de ellas. En el caso de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas, la solución será la intersección de dos semirrectas, que puede ser un intervalo, una semirrecta o el conjunto vacío, caso en el que el sistema no tendrá soluciones (ver ejercicio A/14-3).

Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas. Una inecuación de tipos $A(x, y) \lesseqgtr 0$, o reducible a ellos por transposición de términos, se llama *inecuación con dos incógnitas, x e y.* Si representamos gráficamente el conjunto de los puntos (x, y) del plano que cumplen $A(x, y) = 0$ y la curva obtenida divide el plano en dos regiones, una de ellas está formada por los puntos que cumplen $A(x, y) > 0$, y la otra, por los que cumplen $A(x, y) < 0$, pudiéndose distinguir una de otra «probando» con un punto de una cualquiera de las dos regiones. Con este método *gráfico* se resuelven tales inecuaciones.

Un sistema de inecuaciones con dos incógnitas tiene por solución el conjunto intersección de las soluciones de cada inecuación (ver lámina adjunta).

Dados los números reales a y b, tales que a < b,

se llama	simbolizado...	al conjunto...	representación gráfica...
Intervalo cerrado de extremos a y b,	[a, b]	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$	a b
Intervalo abierto de extremos a y b,	(a, b)	$\{x \in R / a < x < b\}$	a b
Semirrecta abierta de origen en a,	(a, +∞)	$\{x \in R / x > a\}$	a
Semirrecta abierta de final en a,	(–∞, a)	$\{x \in R / x < a\}$	a
Semirrecta cerrada de origen en a,	[a, +∞)	$\{x \in R / x \geq a\}$	a
Semirrecta cerrada de final en a,	(–∞, a]	$\{x \in R / x \leq a\}$	a

Fig. 1 – Rectas e intervalos.

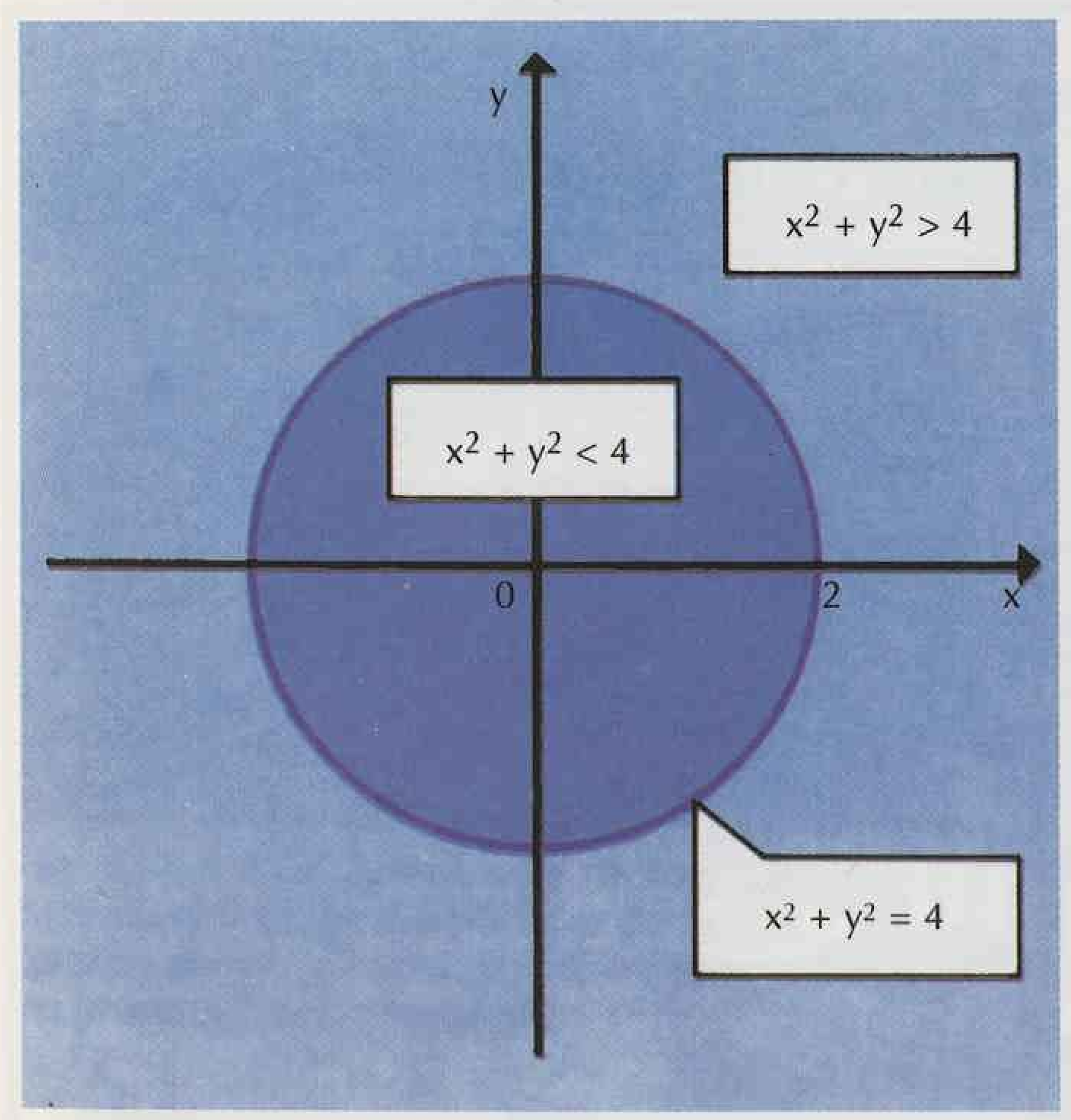


Fig. 2 – El conjunto de puntos (x, y) del plano, tales que $x^2 + y^2 = 4$, es una circunferencia de centro en el origen y radio 2. Su interior y exterior lo forman los puntos que cumplen, respectivamente: $x^2 + y^2 < 4$, $x^2 + y^2 > 4$.

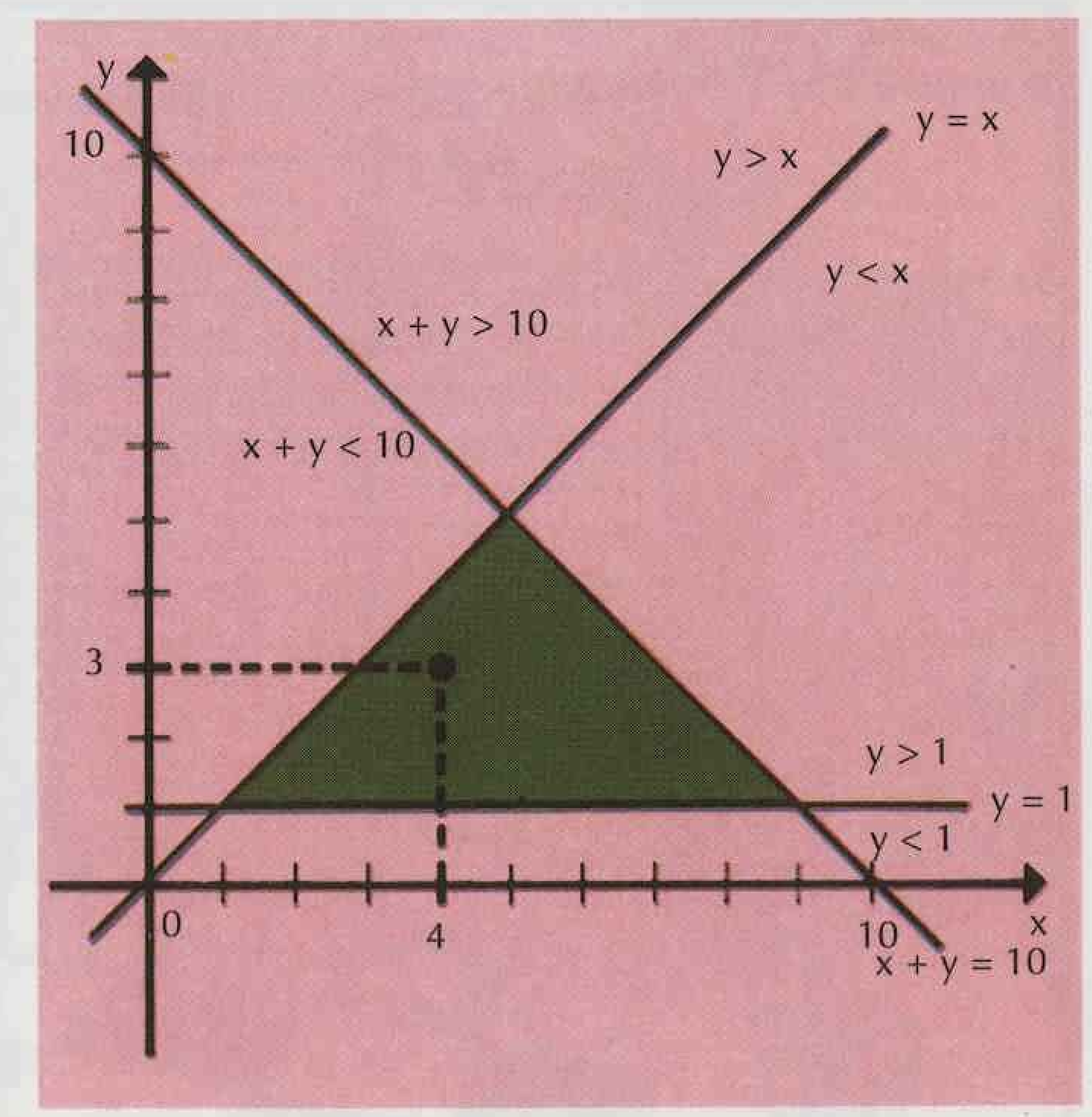


Fig. 3 – La zona triangular de color verde está constituida por los puntos solución del sistema $y > 1$, $x + y < 10$, $y < x$. [Compruébese con P = (4,3)].

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números (llamados *términos*) que se obtienen mediante una fórmula (llamada *término general*) del tipo

$$a_n = an + b$$

donde a y b son constantes y n es el lugar que ocupa el término. Por ejemplo, los números impares, 1, 3, 5, 7, ... forman una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2n - 1$.

Propiedad característica. La diferencia entre dos términos consecutivos es constante y vale a; es decir, cada término se obtiene sumándole a al anterior. Por este motivo, a se llama *diferencia*.

Si i, j, h y k son subíndices tales que $i + j = h + k$, entonces se cumple que $a_i + a_j = a_h + a_k$.

La suma de los n primeros términos de la progresión es:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

El proceso de intercalar k números entre dos números dados p y q, formando una progresión aritmética, se llama *interpolación*. Dicha progresión tendrá $k + 2$ términos, siendo $a_1 = p$ y $a_k + 2 = q$.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una *progresión geométrica* es una sucesión de números cuyo término general es de la forma

$$a_n = a \cdot r^n, \ (a, r \neq 0).$$

Propiedad característica. El cociente de dos términos consecutivos es constante; es decir, cada término se obtiene multiplicando por r el anterior. Por ello, r recibe el nombre de *razón*.

Si $i + j = h + k$, entonces $a_i \cdot a_j = a_h \cdot a_k$. El producto de los n primeros términos de la progresión es

$$p_n = a^n \cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

La suma de los n primeros términos es

$$s_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 (1 - r^n)}{1 - r} \ (r \neq 1).$$

Si $0 < |r| < 1$ entonces, la suma de todos los términos (número infinito) de la progresión es

$$\frac{a_1}{1 - r}.$$

Se llama *interpolación de n términos proporcionales,* entre dos números dados p y q, al proceso de formar una progresión geométrica de $n + 2$ términos, siendo $a_1 = p$ y $a_{n+2} = q$.

ARITMÉTICA MERCANTIL

Interés. Se llama *interés* al beneficio I que proporciona un capital C prestado durante un tiempo t, de acuerdo a una tasa R. La *tasa* (o *tanto por cien*) es el interés que rinden 100 ptas. por unidad de tiempo. (En lenguaje coloquial, se llama «los intereses» al interés y «el interés» a la tasa).

Por regla general, *la tasa se refiere a un año,* independientemente de que la unidad de tiempo adoptada sea un año o una fracción de año (f); semestre ($f = 1/2$), cuatrimestre ($f = 1/3$), trimestre ($f = 1/4$), bimestre ($f = 1/6$), mes ($f = 1/12$) o día ($f = 1/365$ o, más comúnmente, $f = 1/360$, ya que, para simplificar, se suele considerar que todos los meses constan de 30 días y, en consecuencia, que el año tiene 360 días).

Por tanto, es necesario introducir un nuevo concepto: *rédito,* que es el interés producido por una peseta durante una unidad de tiempo. El rédito, *suponiendo que la tasa es anual,* se calcula por la fórmula:

$$r = \frac{R \cdot f}{100}.$$

• **Ejemplo.** Si la tasa de interés es del 18% al año y la unidad de tiempo es el trimestre, entonces $r = 18 \cdot (1/4) \cdot (1/100) = 0{,}045$.

El interés es *simple* si el capital permanece invariable en el transcurso del tiempo, mientras que es *compuesto* si al capital inicial se le suman los intereses producidos al final de cada unidad de tiempo.

El *interés simple* se calcula mediante la fórmula

$$I = C \cdot r \cdot t.$$

En particular, según que el tiempo se mida en años (t_a), meses (t_m) o días (t_d), también se utilizan las fórmulas

$$I = \frac{C \cdot R \cdot t_a}{100} = \frac{C \cdot R \cdot t_m}{1.200} = \frac{C \cdot R \cdot t_d}{36.000}.$$

• **Ejemplo.** Si pedimos un préstamo de 250.000 ptas., a devolver dentro de 8 meses, con una tasa de interés simple (anual) del 14,25%, entonces $r = 14{,}25 \cdot (1/12) \cdot (1/100) = 0{,}011785$ y el interés es:

$$I = 250.000 \cdot 0{,}011785 \cdot 8 = 23.750 \text{ ptas.}$$

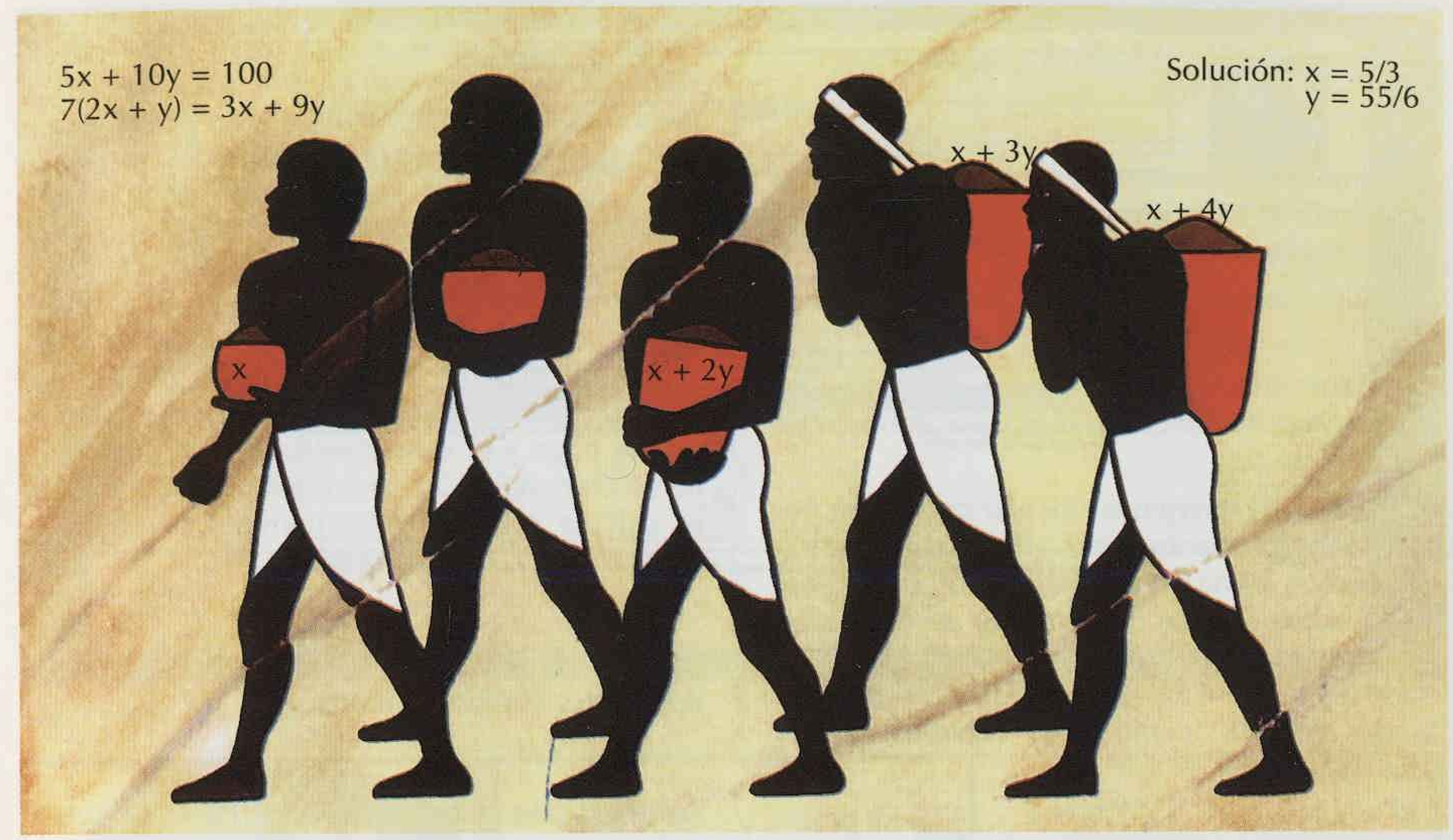


Fig. 1 – Problema del papiro Rhind (~ 1700 a.C.). Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

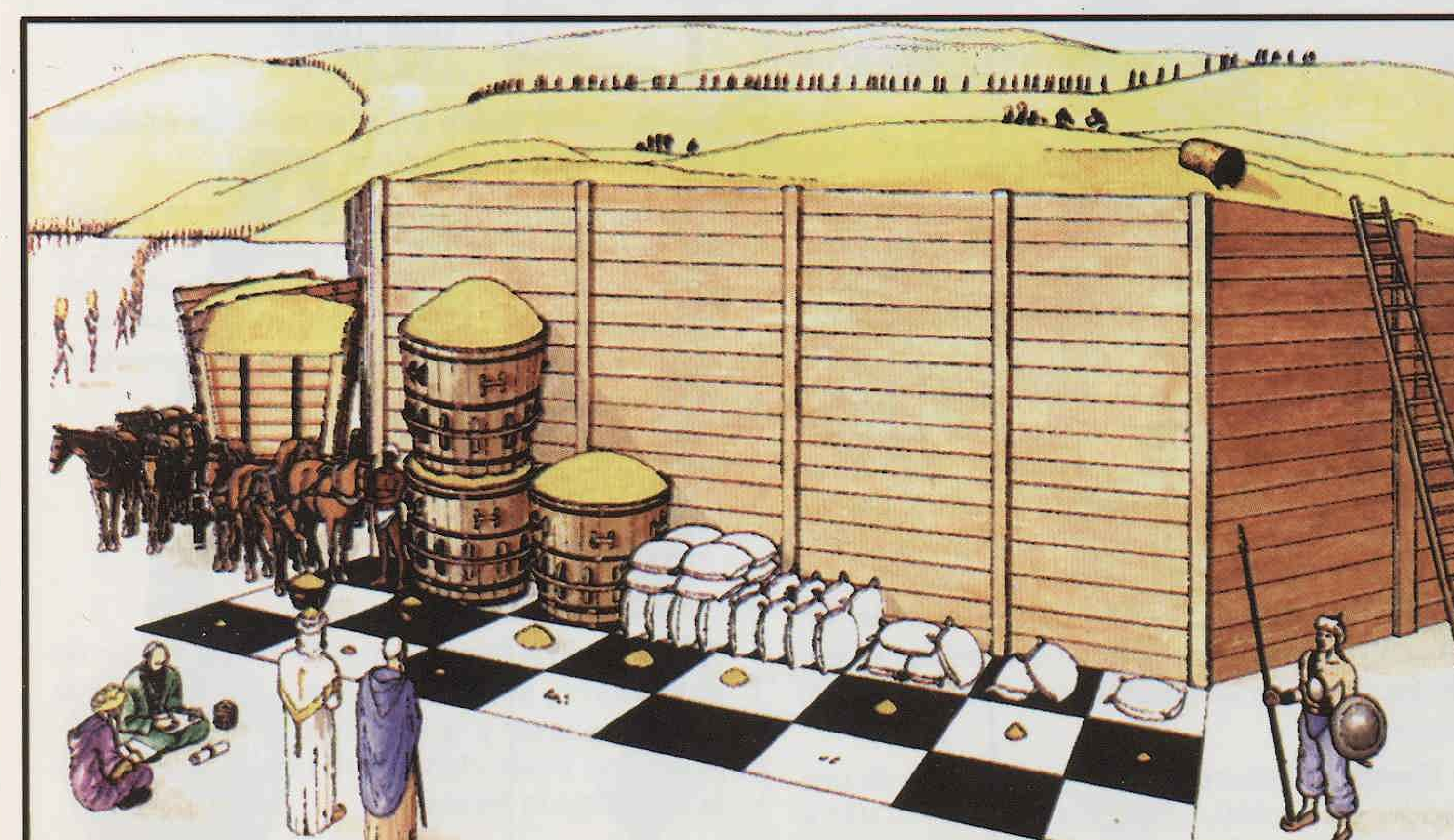


Fig. 2 – El inventor del ajedrez pidió como recompensa una cantidad de trigo obtenida sumando 1 grano por el primer cuadro del tablero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto, y así sucesivamente. El número de granos que resultan es $2^{64} - 1$, inconseguibles aunque todo el sistema solar fuera una plantación de trigo.

El mismo resultado se obtiene aplicando la segunda de las tres últimas fórmulas:

$$I = \frac{250.000 \cdot 14,25 \cdot 8}{1200} = 23.750 \text{ ptas.}$$

Si el interés es *compuesto*, el capital acumulado (o *monto*) al cabo de t unidades de tiempo es

$$M = C \cdot (1 + r)^t,$$

de donde se deduce que el interés obtenido es

$$I = M - C = C \cdot [(1 + r)^t - 1].$$

Para usar adecuadamente estas fórmulas, no sólo es importante calcular el valor correcto de r sino el de t.

• **Ejemplo.** Si queremos calcular cuánto habremos de pagar dentro de 2 años por un millón de pesetas, a una tasa de interés compuesto del 15%, sabiendo que los intereses se acumulan mensualmente, t no vale 2 sino 24 (2 años = 24 meses) y r vale 15 · (1/12) · (1/100) = 0,0125. Luego, en total (capital más intereses) habremos de pagar:

$$M = 1.000.000 \cdot 1,0125^{24} = 1.347.351 \text{ ptas.}$$

El cálculo de una de las variables C, t y R (o r), a partir de las otras dos e I, no entraña dificultad alguna, si el interés es simple, ya que dichas variables se despejan fácilmente en las fórmulas. Si el interés es compuesto, C se calcula fácilmente por una simple división, pero no así t y r (o R):

$$r = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1 \qquad t = \frac{\log M - \log C}{\log (1 + r)}$$

Descuento. Es la rebaja que se hace por pagar una cantidad antes de su vencimiento. Se aplica a dos clases de documentos: facturas y letras de cambio.

Una *factura* es una nota detallada de géneros comprados, servicios prestados, y de su importe. El *descuento de una factura* es una simple rebaja, que suele oscilar entre un 3% y un 5% del importe total, por efectuar el pago de la factura de inmediato y no con un retraso, que según costumbre comercial, puede ser de 30, 60 o 90 días, según acuerden comprador y vendedor. Tambiés se llama *descuento por pronto pago*.

• **Ejemplo.** El descuento por pronto pago de una factura de 10.000, al 5%, es 10.000 · 5/100 = = 500 ptas. Es decir, que al liquidar la factura sólo se pagarán 10.000 – 500 = 9.500 ptas.

Una *letra de cambio* (lo mismo que un *pagaré*) es un efecto de comercio, es decir, un documento por el que se acepta pagar una deuda (llamada *valor nominal*) en una fecha determinada (llamada *vencimiento*), y que puede venderse (generalmente a un banco) antes de dicha fecha. El precio de venta se denomina *valor efectivo* (E) y es la diferencia entre el *valor nominal* (N) y el descuento de la letra (D) : $E = N - D$.

El *descuento de la letra de cambio* es un interés simple, de acuerdo a una tasa anual R y por el tiempo t que medie entre el momento de efectuar el pago y el vencimiento. El descuento se llama *comercial* (D_c) o racional (D_r), según que se calcule sobre el valor nominal o sobre el valor efectivo, respectivamente.

$$D_c = N \cdot r \cdot t, \; D_r = \frac{N \cdot r \cdot t}{1 + r \cdot t},$$

donde r es el rédito (ver Interés)

Amortización y capitalización. Por *amortización* se entiende el pago fraccionado de una deuda D, mediante *cuotas c*, a intervalos de tiempo iguales (años, semestres, meses, etc.) y a una tasa de interés compuesto de R por cien anual. La cuota se calcula mediante la fórmula:

$$c = \frac{D \cdot r \cdot (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1},$$

donde r es el rédito y t el número de unidades o intervalos de tiempo (ver Interés).

• **Ejemplo.** Supongamos que queremos amortizar una deuda de 500.000 ptas. en 2 años, al 17% anual, mediante cuotas cuatrimestrales. Entonces $r = 17 \cdot (1/3) \cdot (1/100) \approx 0,0566667$ y $t = 2 \cdot 12/4 = 6$. Luego, las cuotas de amortización son de:

$$c = \frac{500.000 \cdot 0,0566667 \cdot 1,0566667^6}{1,0566667^6 - 1} \approx$$

$$\approx 100.619 \text{ ptas.}$$

Por *capitalización* se entiende la formación de un capital C, mediante *cuotas c*, a intervalos de tiempo iguales y a una tasa de interés compuesto de R por cien anual. La cuota se calcula mediante la fórmula:

$$c = \frac{C \cdot r}{(1 + r) \cdot [(1 + r)^t - 1]}.$$

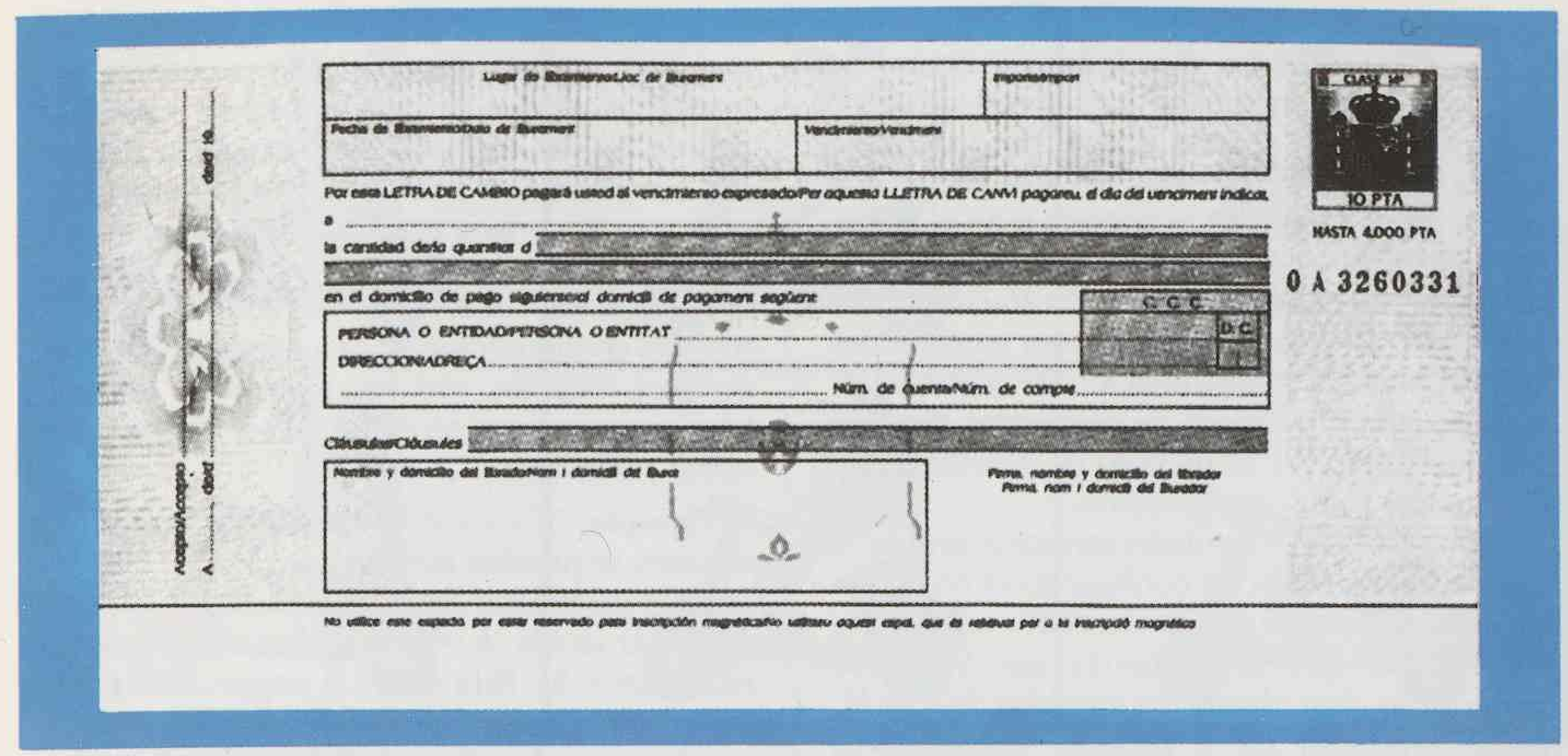


Fig. 1 – Letra de cambio.

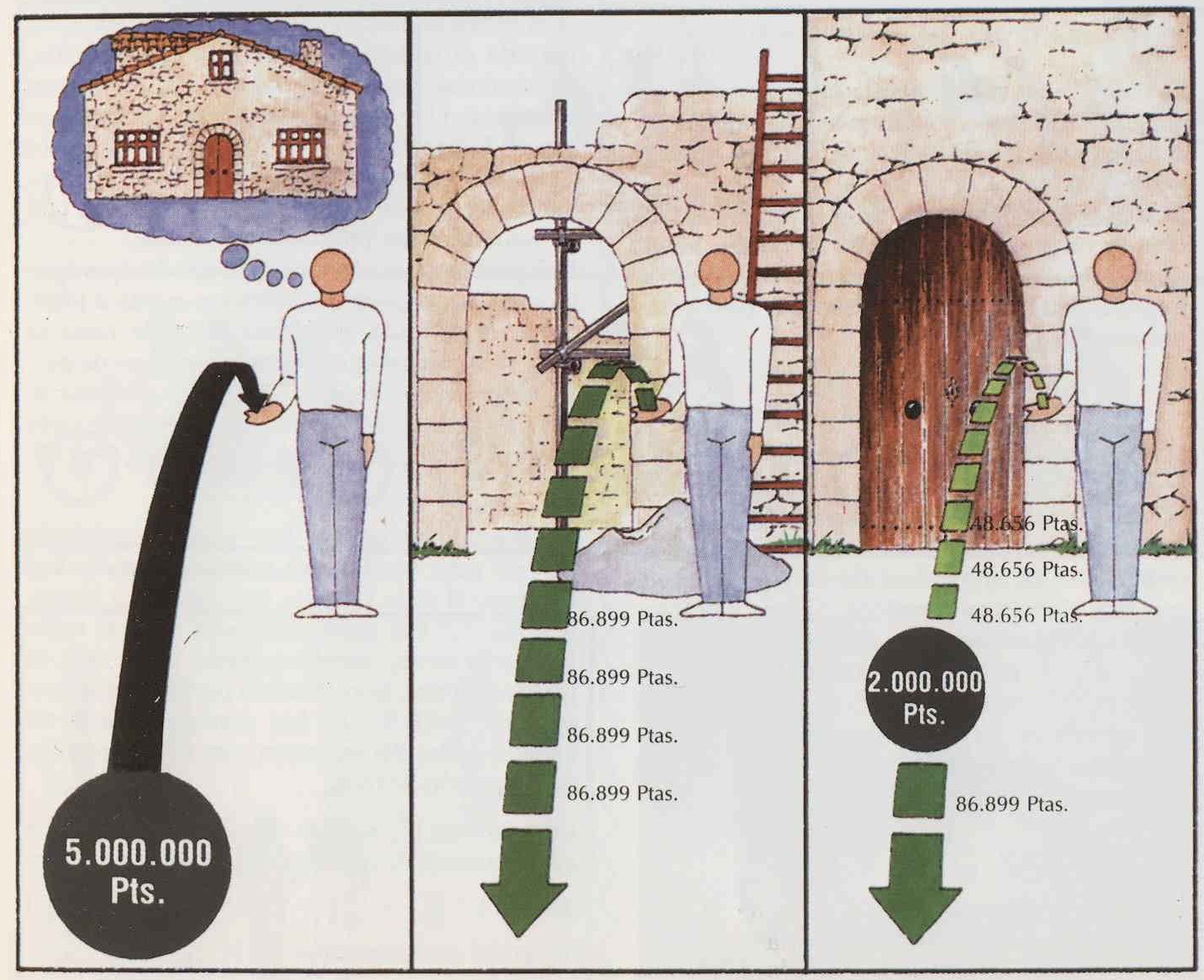


Fig. 2 – A una persona un banco le presta 5 millones de pesetas al 17%, a devolver en 10 años, debiendo por ello pagar una mensualidad de 86.899 ptas. Dos años después, a esa persona le tocan 2 millones de pesetas en la lotería, que amortiza de las 4.544.582 ptas. que en ese momento tiene pendientes. Su nueva mensualidad para los 8 años restantes es 48.656 ptas.

COMBINATORIA

La *combinatoria* es la parte de la matemática que se ocupa del estudio de las configuraciones. Una *configuración* es una manera de elegir y disponer unos objetos dados, de acuerdo a ciertos criterios. Entre éstos hay dos particularmente importantes: 1.° Si importa o no el orden en que se dispongan los objetos. 2.° Si los objetos pueden o no repetirse. Ver ilustración.

Hay seis clases de *configuraciones elementales* que exponemos a continuación. En todas ellas, n representa el *número de elementos disponibles* (distintos) y k el *número de elementos de que consta cada configuración.*

Se llama *variación* (también *variación ordinaria o sin repetición*) a toda configuración en la que importe el orden y no pueda haber repetición. Su número, que se simboliza por V_n^k (léase *variaciones de* n *elementos tomados de* k *en* k), es el producto de k factores consecutivos decrecientes a partir de n:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Se llama *permutación* a toda ordenación de un conjunto de elementos distintos. Su número se calcula por la fórmula (léase *factorial de n*): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Se llama *combinación* a toda configuración en la que no importe el orden ni pueda haber repetición. Su número se calcula mediante la fórmula (léase *combinaciones de* n *elementos tomados de* k *en* k):

$$\binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Se llama *variación con repetición* a toda configuración en la que importe el orden y pueda haber repetición. Su número es $VR_n^k = n^k$.

Se llama *permutación con repetición* a toda ordenación de una colección de objetos en la que hay elementos repetidos. Si hay k objetos en total, de los que n son distintos, repitiéndose r_1 veces el primero r_2 veces el segundo, ..., r_n veces el último, el número de permutaciones con repetición es (léase *permutaciones de* n *elementos tomados de* k *en* k, *con repetición de* r_1 *veces el primero,* r_2 *veces el segundo...*):

$$PR^k_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!} (k = r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$$

Se llama *combinación con repetición* a toda configuración en la que no importa el orden y puede haber repetición. Su número se calcula por la fórmula:

$$CRn = \binom{n+k-1}{k}$$

Hay dos clases de *problemas combinatorios:* elementales y compuestos. Un *problema elemental* es el que se puede resolver mediante una de las seis fórmulas anteriores. Un *problema compuesto,* en cambio, requiere una descomposición previa en problemas elementales. Para resolver un problema combinatorio, lo primero que hay que hacer es reconocer cómo son sus configuraciones: de cuántos elementos constan, cúantos son los elementos disponibles, si importa o no el orden, si puede o no haber repetición, ...

• **Ejemplo.** ¿Cuántos números de dos cifras impares se pueden escribir?

En este problema, las configuraciones constan de 2 elementos ($k = 2$) elegidos entre 5 disponibles ($n = 5$). Para saber si importa el orden, construimos un ejemplo de configuración: 13 y cambiamos el orden de sus elementos: 31; como resulta una configuración distinta, importa el orden (si la configuración es la misma, no importa el orden). En cuanto a la repetición, construimos una configuración con elementos repetidos: 11 y vemos que tiene sentido; luego puede haber repetición. (En general, siempre puede haber repetición, a no ser que el enunciado del problema indique lo contrario o que la naturaleza del problema lo impida).

Este problema es elemental; el cuadro que aparece en las páginas de ejercicios ayuda a identificar la fórmula adecuada. En este caso se trata de variaciones con repetición (y no de permutaciones con repetición porque en éstas se indica claramente cuántas veces se repite cada elemento). La solución es, pues, $VR_5^2 = 5^2 = 25$.

Desgraciadamente no hay una metodología general para resolver los problemas compuestos, pero sí unos criterios que ayudan a identificarlos: 1.° Las configuraciones no son *todas* las variaciones, combinaciones, etc. que se pueden formar, sino sólo una parte de ellas (ver ejercicio A/18-9). 2.° Las configuraciones no constan todas del mismo número de elementos (ver ejercicio A/18-8).

Los números $\binom{n}{k}$ reciben el nombre de *números combinatorios* y verifican las siguientes propiedades: 1.ª $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, 2.ª $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (prop.del complementario). 3.ª $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (propiedad triangular).

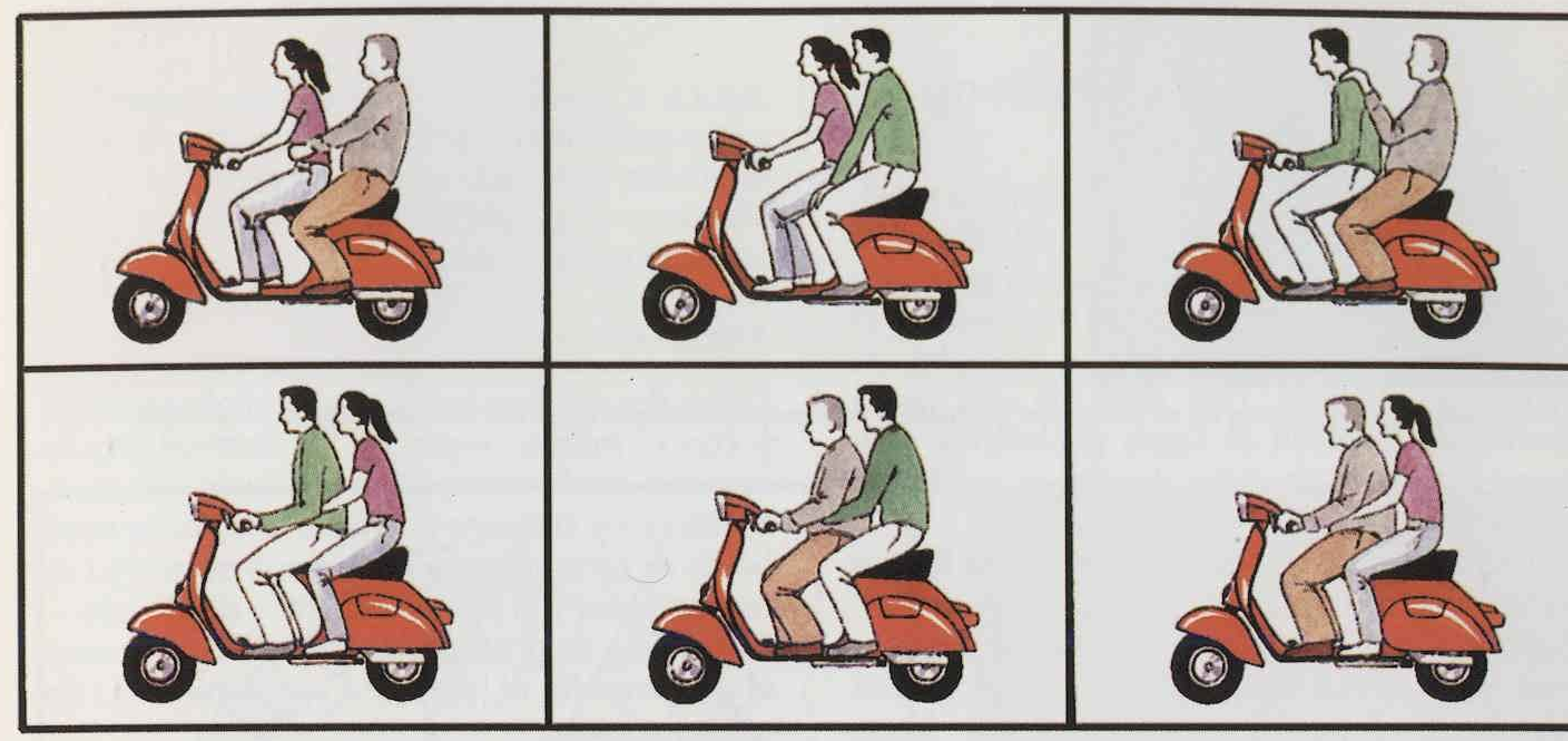


Fig. 1 – Variaciones de 3 elementos, tomados de 2 en 2.

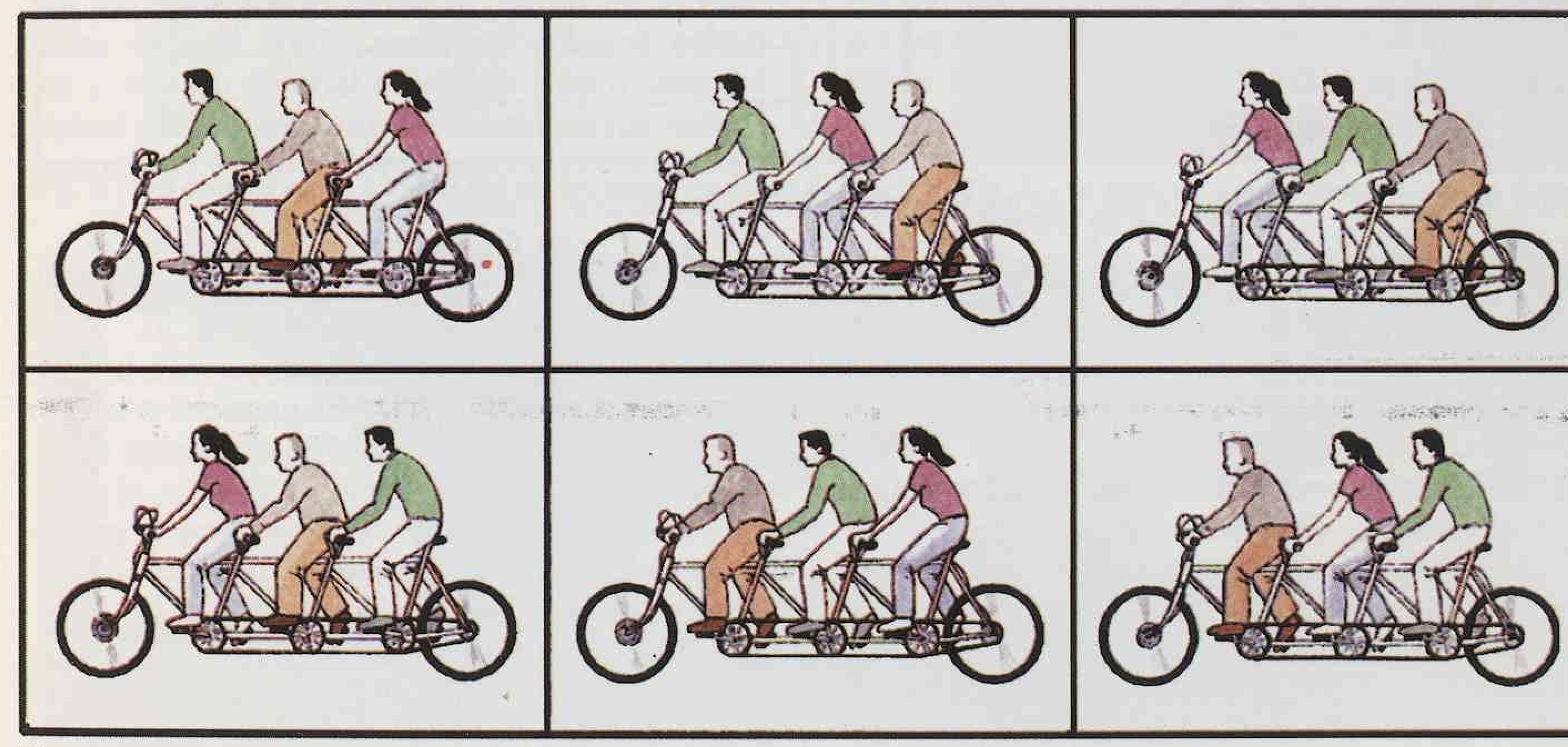


Fig. 2 – Permutaciones de 3 elementos.

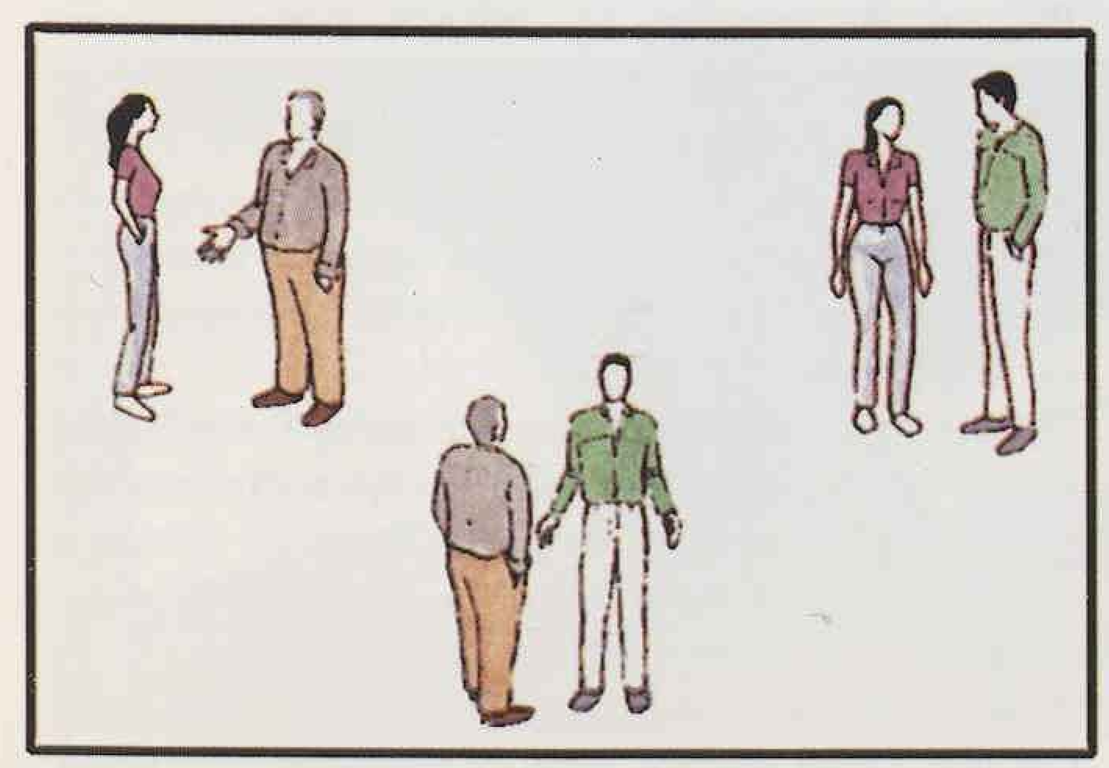


Fig. 3 – Combinaciones de 3 elementos, tomados de 2 en 2.

Fig. 4 – Los 6 integrantes del Club Corb se reúnen para jugar a bridge, turnándose para descansar.

Pueden enfrentarse de $\binom{6}{2}$ 3 = 45 maneras.

Geometría sintética

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DEL PLANO

La palabra griega *Geometría,* que significa medición de la tierra, originalmente hacía referencia a la ciencia que trataba de las figuras geométricas usadas para la medición de extensiones. El triángulo y la circunferencia son ejemplos de figuras geométricas. Una parte de una figura geométrica también es figura geométrica. Asimismo, la unión de varias de ellas es igualmente una figura geométrica.
La parte de la *Geometría* que trata de la figuras en el plano se llama *Planimetría.*
Punto y recta. Las figuras geométricas elementales en el plano son el *punto* y la *recta.* Los puntos se designan usualmente por letras mayúsculas, las rectas por letras minúsculas.
Relaciones fundamentales de pertenencia. En la figura 1a, los puntos *A* y *C se hallan en r* o *pertenecen a r.* También puede decirse que *r* pasa por *A* y *C.* El punto *C* es el *punto de intersección de r* y *s.*
Para toda recta *r* existen puntos que pertenecen y puntos que no pertenecen a *r.*
Para todo par de puntos *A* y *C,* distintos, existe una sola recta que pasa por ellos. A dicha recta puede llamársela *AB.*
Dos rectas distintas no se cortan o se cortan en un único punto.
Relaciones fundamentales de posición. Entre puntos alineados, se tiene la relación *estar entre.* En la figura 1b el punto *B* se encuentra *entre A* y *C.* También se dice que *A* y *C* se hallan *a distinto lado* de *B.* Cada uno de estos puntos, por ejemplo *A,* divide la recta *r* en dos *semirrectas* llamadas *complementarias;* con respecto a éstas, *B* y *C* se hallan en la misma semirrecta, y *B* y *D,* en distinta.
Sean dos puntos *A* y *B* sobre una recta, se llama *segmento de extremos A* y *B,* simbolizado *AB,* al conjunto de los puntos situados entre *A* y *B.*
En la figura 1c, la recta *r* divide el plano en dos *semiplanos* α y β, ambos de *borde r.* Si dos puntos están en el mismo semiplano, como *A* y *B,* el segmento que los une no corta a *r*; si están en distinto semiplano, como *C* y *D,* el segmento que los une corta a *r.*
Medición de segmentos. La longitud de un segmento es un número real positivo o cero. Para medir segmentos, se emplean diversos instrumentos; el más usual es la regla graduada.
Si el punto *C* de la recta *AB* está entre *A* y *B,* la longitud de *AB* es la suma de las longitudes de *AC* y *BC.*
Se dice que dos segmentos son *congruentes* si tienen la misma medida, o *iguales,* si ello no induce a confusión. *A* veces, dos segmentos congruentes los consideraremos como el mismo segmento, colocado en distinta posición.
Llamaremos *distancia* entre los puntos *A* y *B* a la longitud del segmento *AB.*

ÁNGULOS

Dadas dos semirrectas *r* y *s,* no complementarias y con el mismo origen *O,* llamaremos *ángulo convexo rs* a la intersección del semiplano cuyo borde es *r* y contiene a *s,* y del semiplano cuyo borde es *s* y contiene a *r.* Las semirrectas *r* y *s* se llaman *lados* y el punto *O, vértice* del ángulo.
Otra forma de proceder es definir ángulo como el conjunto {*a, b*}, siendo *a* y *b* semirrectas de origen común.
Consideradas, pues, dos rectas cuya intersección es un punto, el plano queda dividido en cuatro ángulos convexos. Cada dos de esos ángulos, o bien tienen un lado en común, y se llaman *adyacentes,* o bien sus respectivos lados son semirrectas complementarias, y se llaman *opuestos por el vertice.*
Por tanto, cada ángulo tiene dos adyacentes, y un opuesto por el vértice. La unión de estos tres ángulos se llama *ángulo cóncavo* (fig. 3).
Medida de ángulos. El instrumento más usado para medir ángulos es el *transportador* o *semicírculo graduado.* Dos ángulos se llaman *congruentes* si miden lo mismo, o *iguales,* si ello no induce a confusión. A veces, dos ángulos congruentes serán considerados como el mismo ángulo, colocado en distinta posición.
Ángulo recto es el que es congruente con uno de sus adyacentes. Un ángulo se llama *obtuso* si es convexo y mayor que un recto, y *agudo,* si es menor que un recto.
Para medir ángulos, se utilizan distintos sistemas de unidades. El sistema *sexagesimal* se construye dividiendo un ángulo recto *R* en 90 partes iguales, llamadas *grados* (°); luego se divide un grado en 60 partes iguales, llamadas *minutos* (′). Finalmente, se divide un minuto en 60 *segundos* (″) (fig. 5).
El sistema *centesimal* se construye mediante sucesivas divisiones por 100, obteniéndose los *grados* (g), *minutos* (m) y *segundos* (s) *centesimales* (fig. 4). Otra unidad de medida de ángulos es el *radián* (ver tarjeta B/4).
Adición de ángulos. Dos ángulos con un lado común, igual vértice, y no contenidos uno en el otro se llaman *consecutivos.* Su unión se llama *ángulo suma* de ambos.
Dos ángulos se llaman *suplementarios* si suman un llano, y *complementarios* si suman un recto.

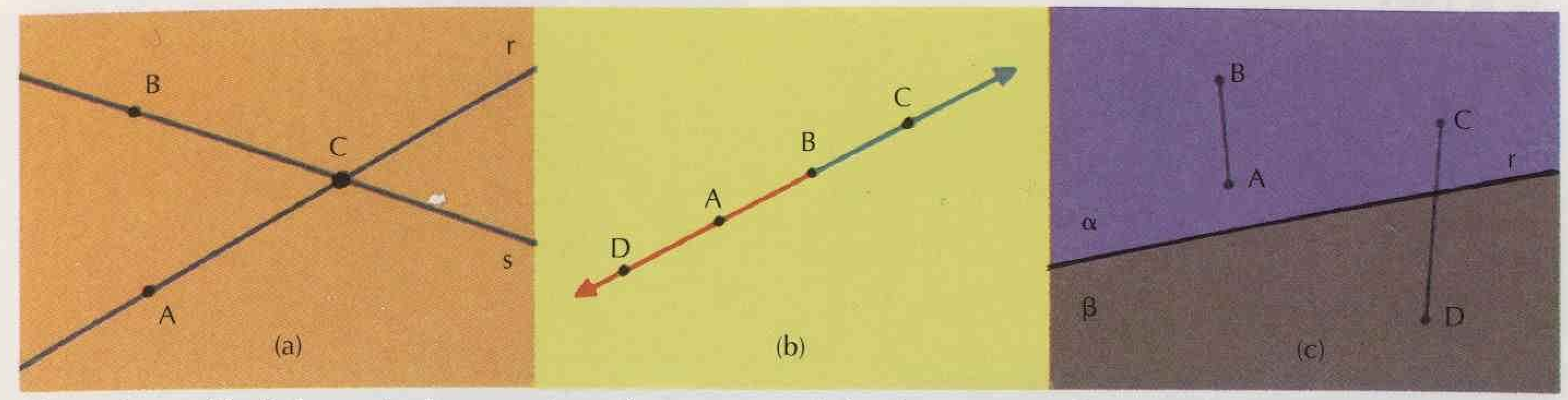


Fig. 1 – Separación de los puntos de una recta mediante un punto de la misma y separación en un plano producida por una recta.

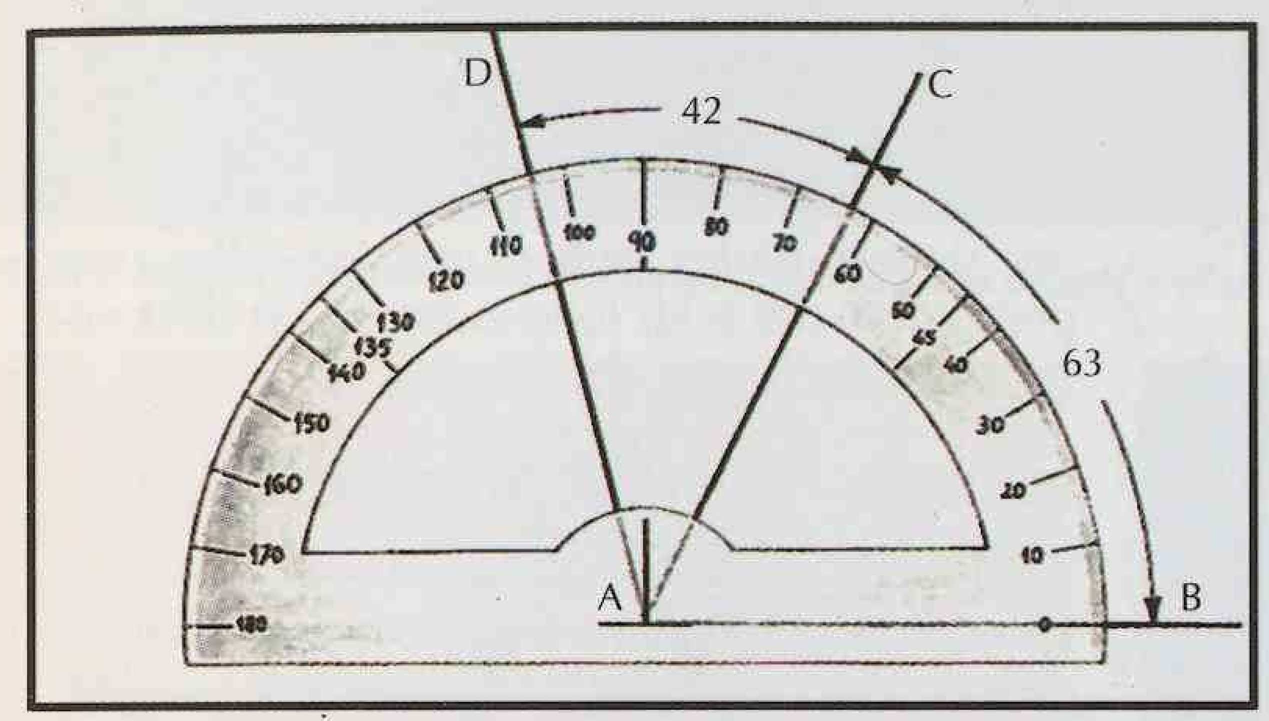


Fig. 2 – Los ángulos <BAC y <CAD son consecutivos y su suma es 105°.

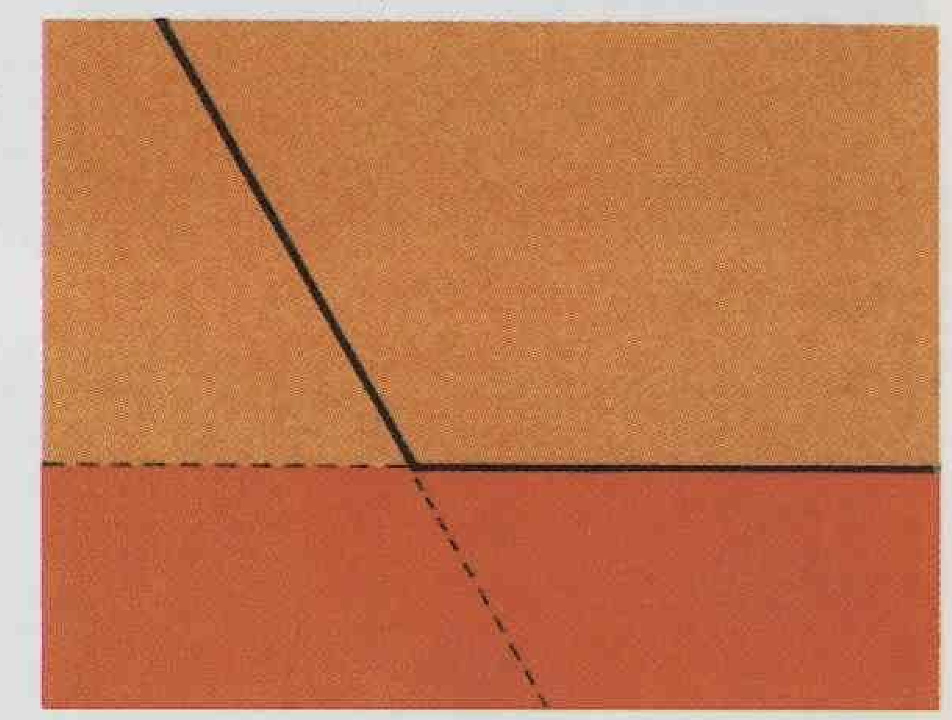


Fig. 3 – En rojo, un *ángulo cóncavo,* que es el complemento de uno convexo.

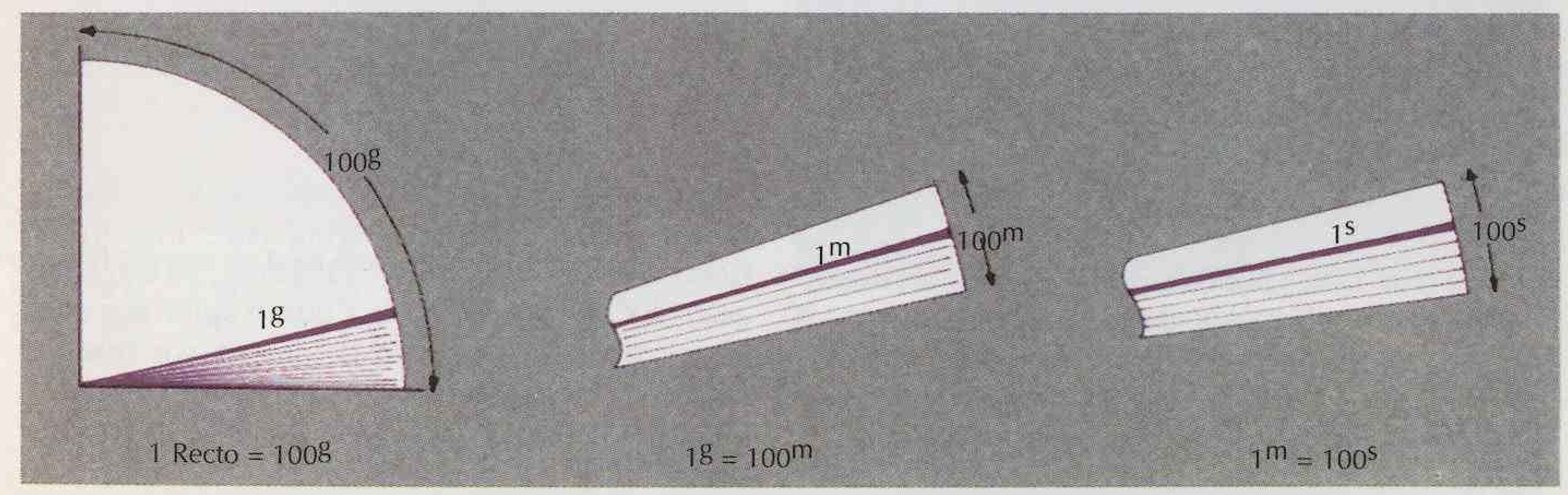


Fig. 4 – Sistema centesimal.

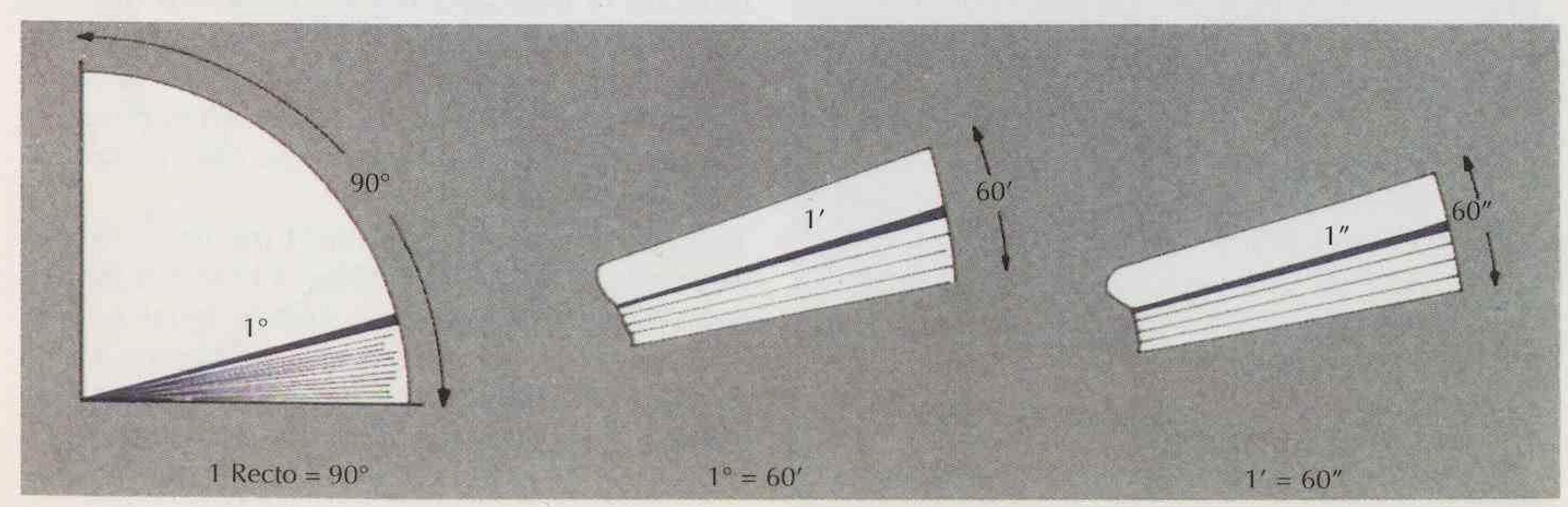


Fig. 5 – Sistema sexagesimal.

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD EN EL PLANO

Paralelismo. Dos rectas *r* y *s* son paralelas cuando tienen la misma dirección (indicándose con $r||s$). Si no son la misma recta, ello equivale a decir que no tienen puntos comunes. Si no son paralelas, se cortan en un punto y se llaman *secantes.*
Se admite que toda recta es paralela a sí misma.
Si $r||s$, entonces $s||r$.
Si $r||s$,y $s||t$, entonces $r||t$.
Por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a la recta.
Perpendicularidad. Dos rectas son *perpendiculares* si se cortan formando ángulos rectos. En caso contrario, se llaman *oblicuas.*
Por todo punto puede trazarse una, y sólo una, perpendicular a una recta.
Si una recta *r* es perpendicular a otra recta *s*, también lo es a toda paralela *t* a ésta. Se llama *distancia entre s y t* a la longitud del segmento interceptado en *r* por *s* y *t*.
Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
Congruencia de ángulos. Dos ángulos que tengan los lados respectivamente paralelos son congruentes o suplementarios. Asimismo, dos ángulos con lados respectivamente perpendiculares, son congruentes o suplementarios.
Ángulos formados por dos rectas y una secante común. Si una recta *t* corta a otras dos, *a* y *b*, lo hace formando 8 ángulos, que reciben los nombres que se indican en la figura 1.
Si $a||b$, son congruentes los ángulos *alternos internos,* los *alternos externos* y los *correspondientes;* son suplementarios los *internos del mismo lado* y los *externos del mismo lado.*
Si *a* y *b* no son paralelas, no se cumple ninguna de las relaciones anteriores.
Mediatriz de un segmento. Llamaremos *mediatriz de un segmento* a la recta perpendicular en su punto medio, que está formada por aquellos puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.
Bisectriz de un ángulo. Se llama *bisectriz de un ángulo ab* a la semirrecta que pasa por el vértice de *ab* y lo divide en dos ángulos iguales.
La *distancia de un punto a una recta* es la longitud del segmento de perpendicular trazada desde el punto a la recta.
Todo punto P de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

Concepto de lugar geométrico. Se llama *lugar geométrico* de puntos a todo conjunto de puntos que quede caracterizado por una determinada propiedad geométrica. Dicha definición puede extenderse a otro tipo de elementos, tales como rectas o planos. Así, por ejemplo, puede definirse la *mediatriz de un segmento* como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas secantes está formado por los puntos de dos rectas (llamadas *bisectrices* de las anteriores), que se obtienen reuniendo las bisectrices de los cuatro ángulos formados.
Teorema de Tales. Si dos rectas cualesquiera, *r* y *s*, son cortadas por un sistema de rectas paralelas *a, b, c, d…*, las longitudes de los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a las longitudes de los determinados sobre la otra (fig. 2).

ALGUNAS CONSTRUCCIONES SENCILLAS CON REGLA Y COMPÁS

Dibujo de un ángulo congruente con otro. Se desea construir un ángulo congruente con *ABC* y vértice en *B′* (fig. 3): I) Con centro en *B*, y radio cualquiera, se traza un arco *XY*. II) Con centro en *B′* y radio *BY*, se traza un arco *X′Y′*. III) Ahora, con centro en *Y′* y radio *XY*, se dibuja un arco, que corta al anterior en *X′*. El ángulo *X′B′Y′* es el buscado.
Trazado de la bisectriz de un ángulo. Dibujaremos la bisectriz del ángulo *ABC* (fig. 4). I) Con centro en *B* y radio cualquiera, se traza el arco *XY*, II) tomando *X* e *Y* como centros y con el mismo radio, que ha de ser mayor que la mitad del segmento *XY*, se dibujan sendos arcos, que se cortan en *B′*. La recta *BB′* es la bisectriz.
Trazado de la mediatriz de un segmento. Se dibujará la mediatriz del segmento *AB* (fig. 5). Con centro primero en *A* y después en *B*, y con radio mayor que la mitad de *AB*, se trazan sendos arcos, por arriba y por abajo del segmento. Los puntos *P* y *P′* de intersección determinan la mediatriz.
Tanto el problema de dibujar la mediatriz de un segmento como el de dibujar la bisectriz de un ángulo, o el de trazar un ángulo igual a uno dado pueden resolverse, aunque de forma poco exacta, haciendo uso del transportador de ángulos y una regla graduada.

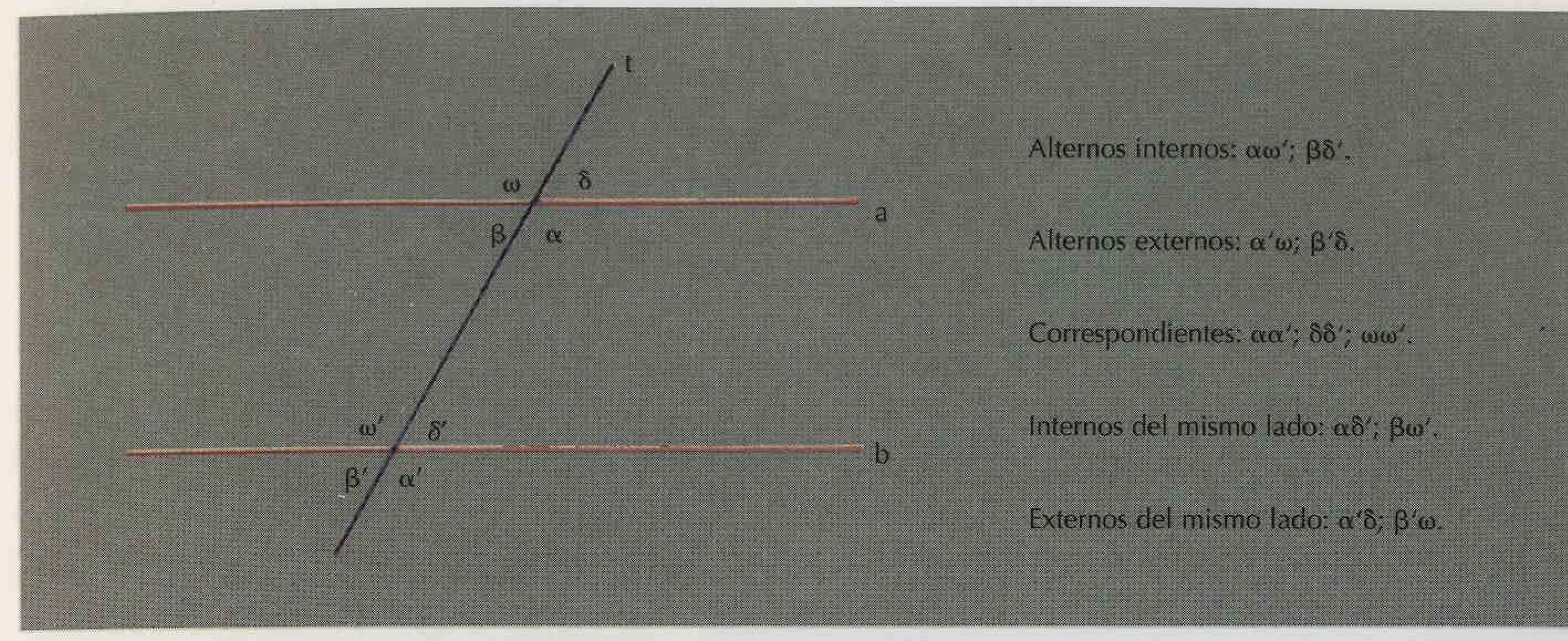


Fig. 1 – Ángulos formados entre dos rectas paralelas y una secante a ellas.

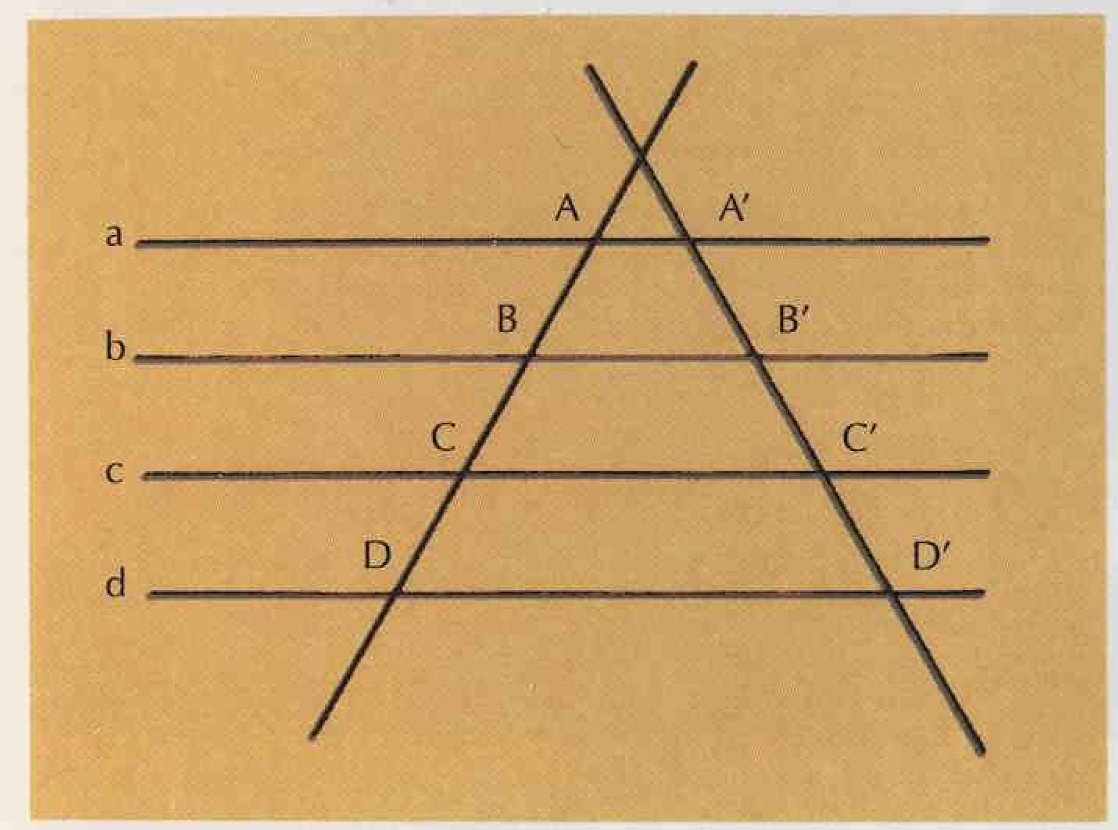


Fig. 2 – El teorema de Tales afirma que: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$

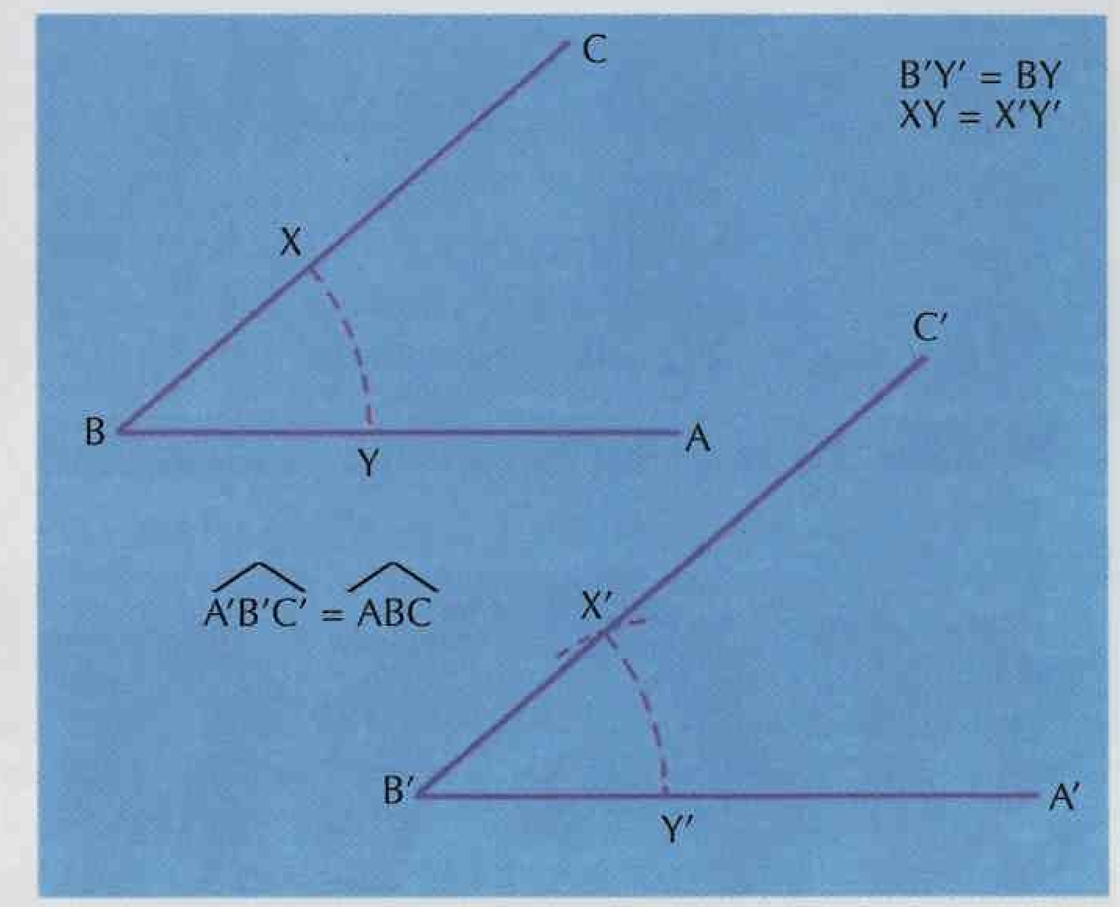


Fig. 3 – Construcción de ángulos congruentes.

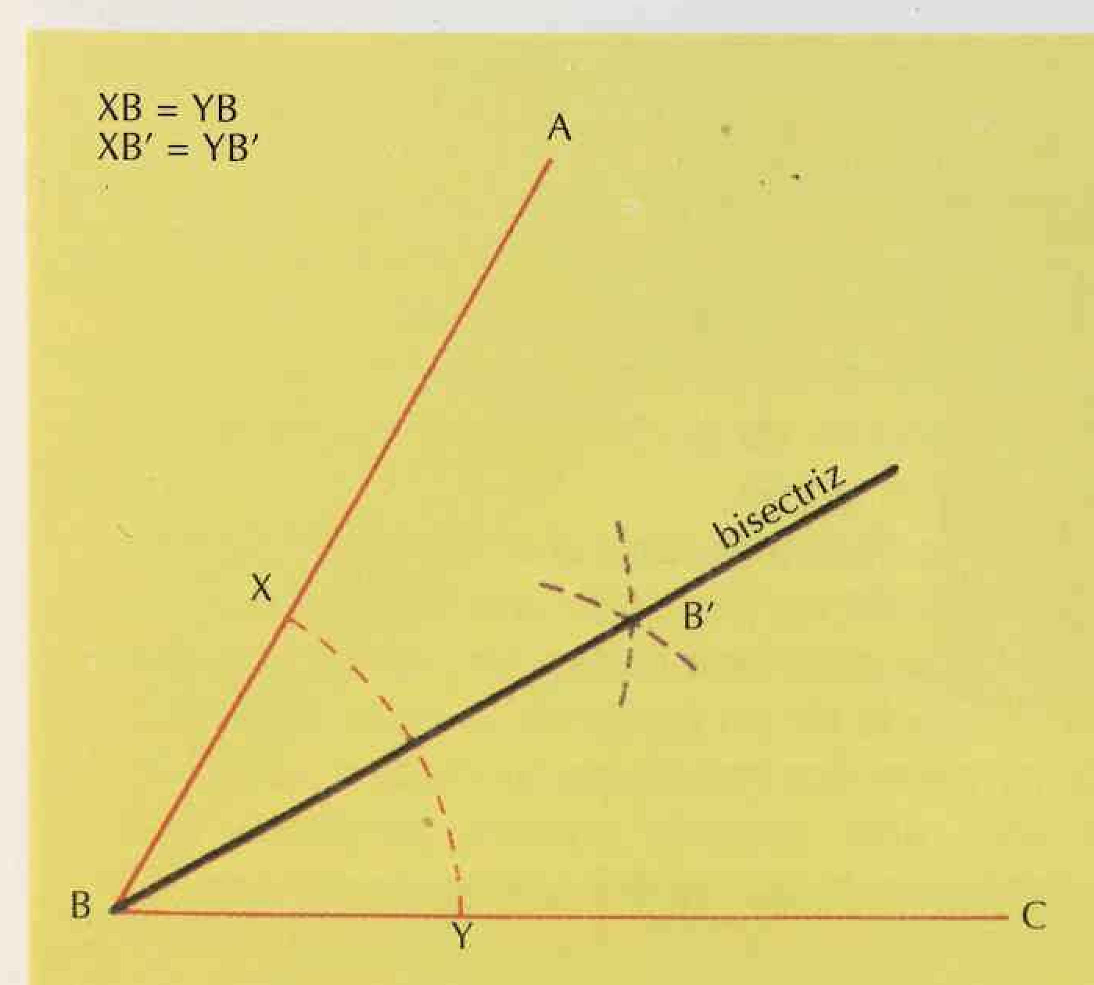


Fig. 4 – Construcción de la bisectriz.

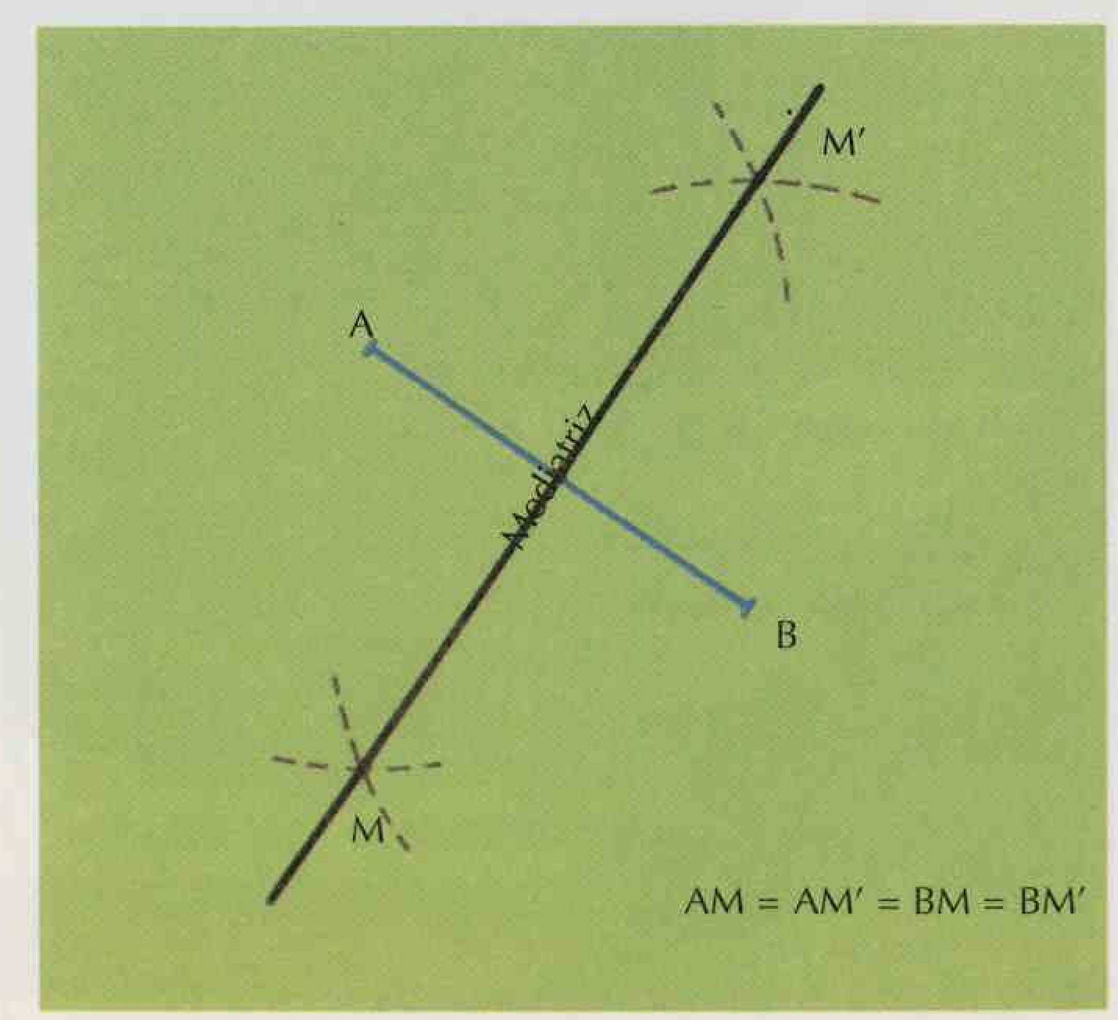


Fig. 5 – Construcción de la mediatriz.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

En el espacio las figuras elementales son el *punto*, la *recta* y el *plano*.

Relaciones fundamentales. Las relaciones de pertenencia y orden en el plano siguen siendo válidas en el espacio.

Dado un plano, en él existen puntos no alineados. Hay puntos en el espacio que no pertenecen al plano.

Si dos planos distintos tienen un punto en común, tienen una recta en común, llamada *intersección de ambos planos.* A los planos se les llama *secantes.*

Si dos rectas tienen un punto en común, existe un único plano que pasa por ellas.

Si α y β son dos semiplanos con un borde común r, se llama *diedro* $\alpha\beta$ al conjunto $\{\alpha, \beta\}$. La recta *r* se llama *arista del diedro.*

Algunos teoremas de Geometría en el espacio. Por una recta y un punto exterior a ésta pasa un único plano que contiene a ambos.

Si una recta tiene dos puntos en un plano, toda la recta está contenida en el plano.

Por tres puntos no alineados pasa un único plano.

Todo plano α divide el espacio en dos semiespacios, llamados complementarios. El plano α se llama *borde de ambos semiespacios.*

Paralelismo. *Dos rectas distintas son paralelas* si están contenidas en un mismo plano y tienen la misma dirección. Las propiedades de paralelismo de rectas en el plano se cumplen también en el espacio.

Una recta r *y un plano* α *son paralelos* si *r* es paralela a una recta *t* del plano. En consecuencia, *r* estará en α o no lo cortará.

Por un punto exterior a un plano pasan infinitas paralelas a dicho plano.

Un plano α es paralelo a otro β si toda recta que esté contenida en α es $||$ a β.

Todo plano es paralelo a sí mismo.

Sean α, β, γ tres planos. Se tiene:

Si $\alpha||\beta$, entonces $\beta||\alpha$. Si $\alpha||\beta$ y $\beta||\gamma$, entonces $\alpha||\gamma$.

Por un punto exterior a un plano existe un plano, y sólo uno, paralelo a aquél.

Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas.

El lugar geométrico de las rectas paralelas a un plano α por un punto exterior a éste es otro plano β, paralelo a α.

Se dice que dos *rectas se cruzan* si no existe ningún plano que pase por ambas.

Perpendicularidad. La perpendicularidad de rectas que se hallan en un mismo plano ya ha sido estudiada; se extenderá al resto de los casos que se presentan en el espacio.

Dos rectas que se cruzan son perpendiculares si lo son sendas rectas, secantes entre sí y paralelas, a aquéllas.

Una recta se llama perpendicular a un plano si lo es a toda la recta del plano.

Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano, es perpendicular al plano.

Por un punto *P* pasa una sola perpendicular a un plano.

Todas las rectas perpendiculares a una recta *r* por un punto *P* de ella están en un plano, que se llama *plano perpendicular a r por* P.

Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas. Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos.

La sección producida en un diedro por un plano perpendicular a su arista, es un ángulo plano, llamado *sección recta del diedro. Dos planos se llaman perpendiculares,* si su sección recta es un ángulo recto.

Proyección ortogonal P' de un punto *P* sobre un plano α es la intersección del plano con la recta perpendicular a α por *P*. La proyección ortogonal de una recta sobre un plano α es la recta obtenida al proyectar ortogonalmente sobre α cada punto de *r* (fig. 3).

Ángulos. Sea *r* una recta no perpendicular a un plano. Se llama *ángulo de la recta y el plano* al ángulo agudo que forman la recta con su proyección ortogonal sobre el plano.

Llamaremos *ángulo de dos rectas que se cruzan, no perpendiculares,* al ángulo agudo que forman sendas paralelas a ellas por un punto.

Ángulo de dos planos secantes es su sección recta.

Distancias. Se llama *distancia* entre dos figuras geométricas a la mínima distancia entre un punto de una y un punto de otra.

Distancia de un punto a un plano es la longitud del segmento de perpendicular limitado por el punto y el plano.

Se llama *distancia entre dos planos paralelos* a la distancia de un punto de uno de ellos al otro.

Distancia entre una recta y un plano paralelos es la distancia de un punto de la recta al plano.

Si *r* y *s* son dos rectas que se cruzan, existe una, y sólo una, secante común, perpendicular a ambas. La longitud del segmento determinado sobre esta recta por *r* y *s* se llama *distancia entre r y s.*

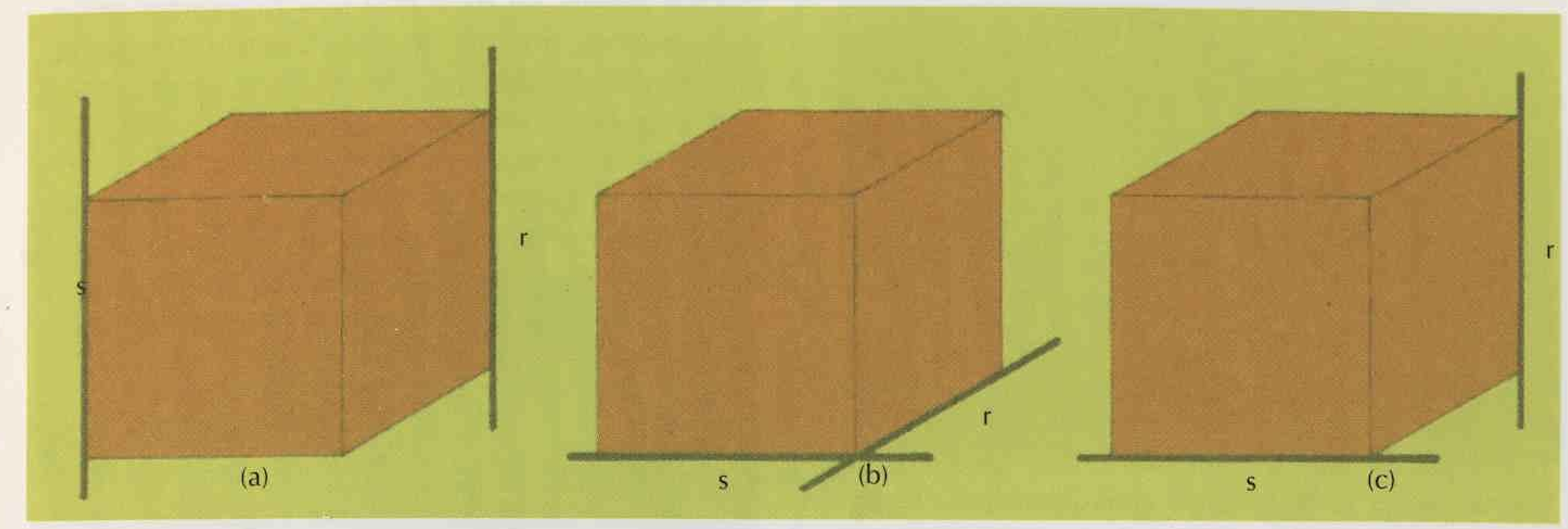


Fig. 1 – Posición relativa de dos rectas en el espacio.

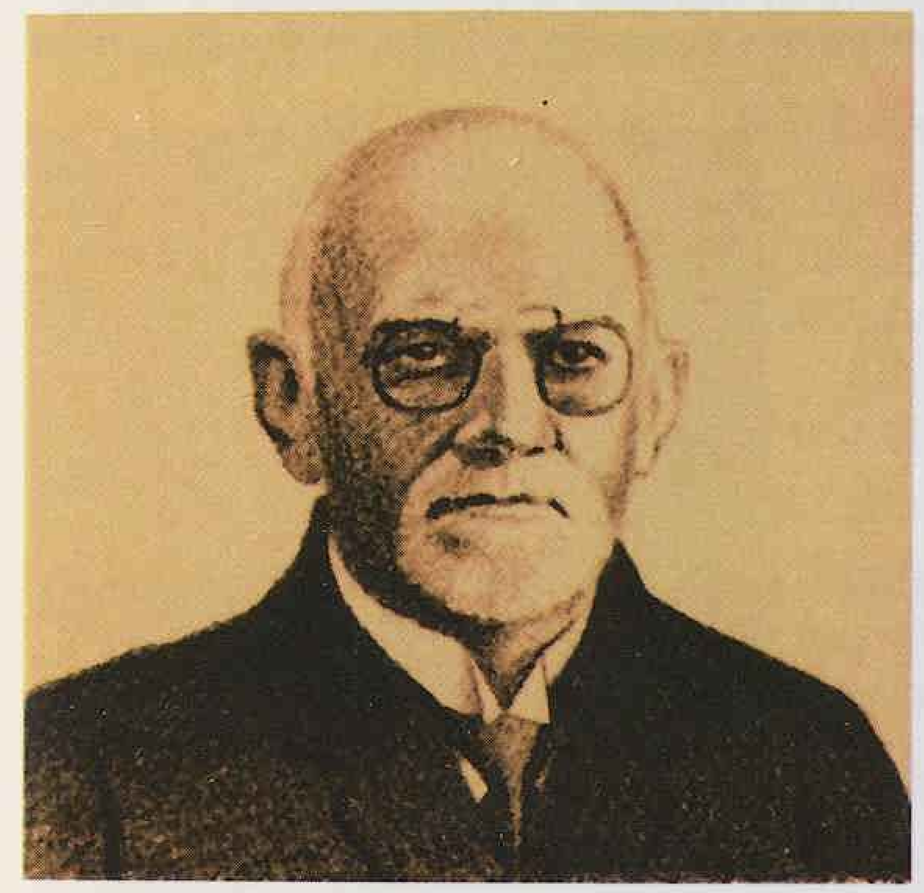


Fig. 2 – David Hilbert (1862-1943), precursor de la axiomatización de la geometría.

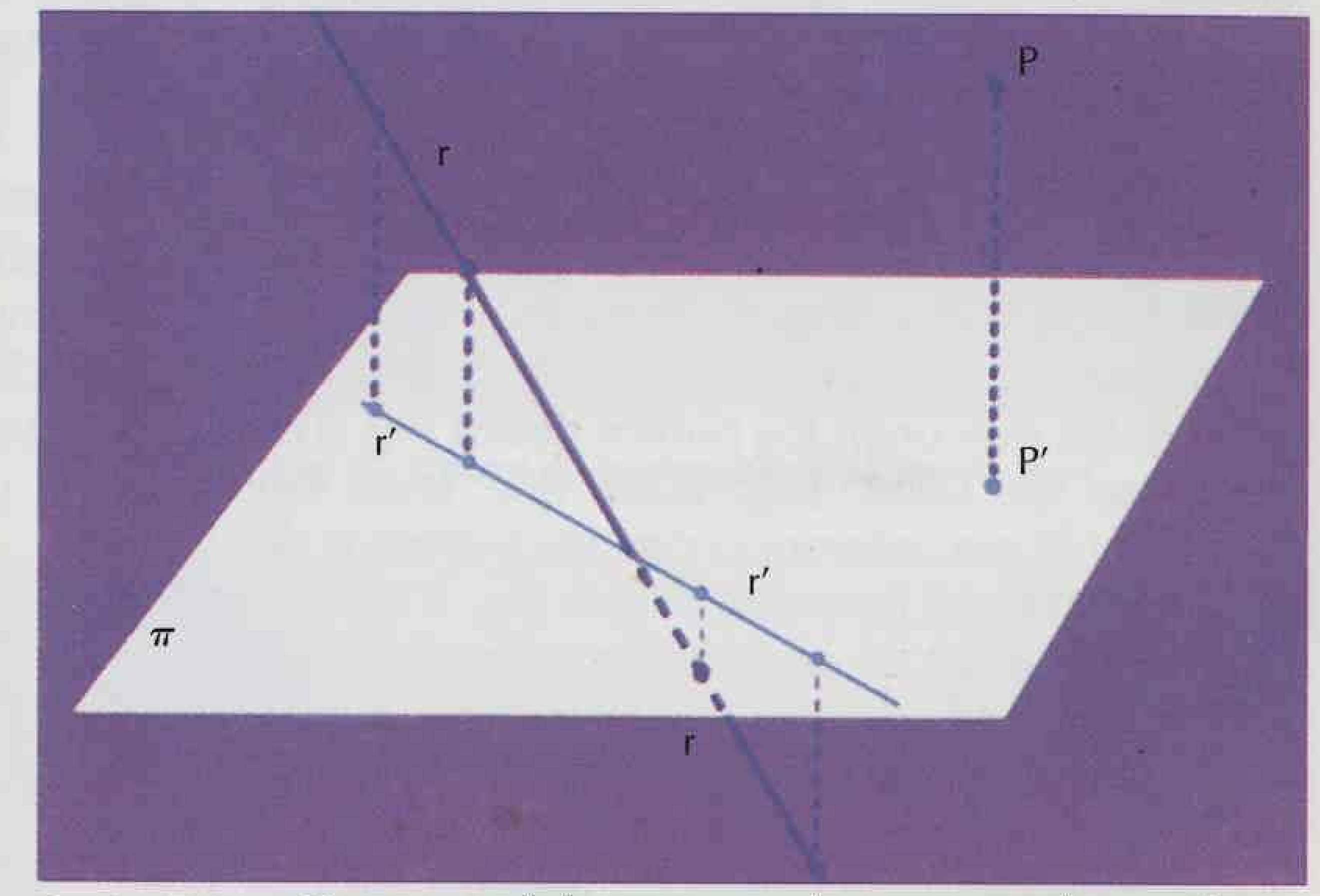


Fig. 3 – Proyección ortogonal de un punto y de una recta sobre un plano.

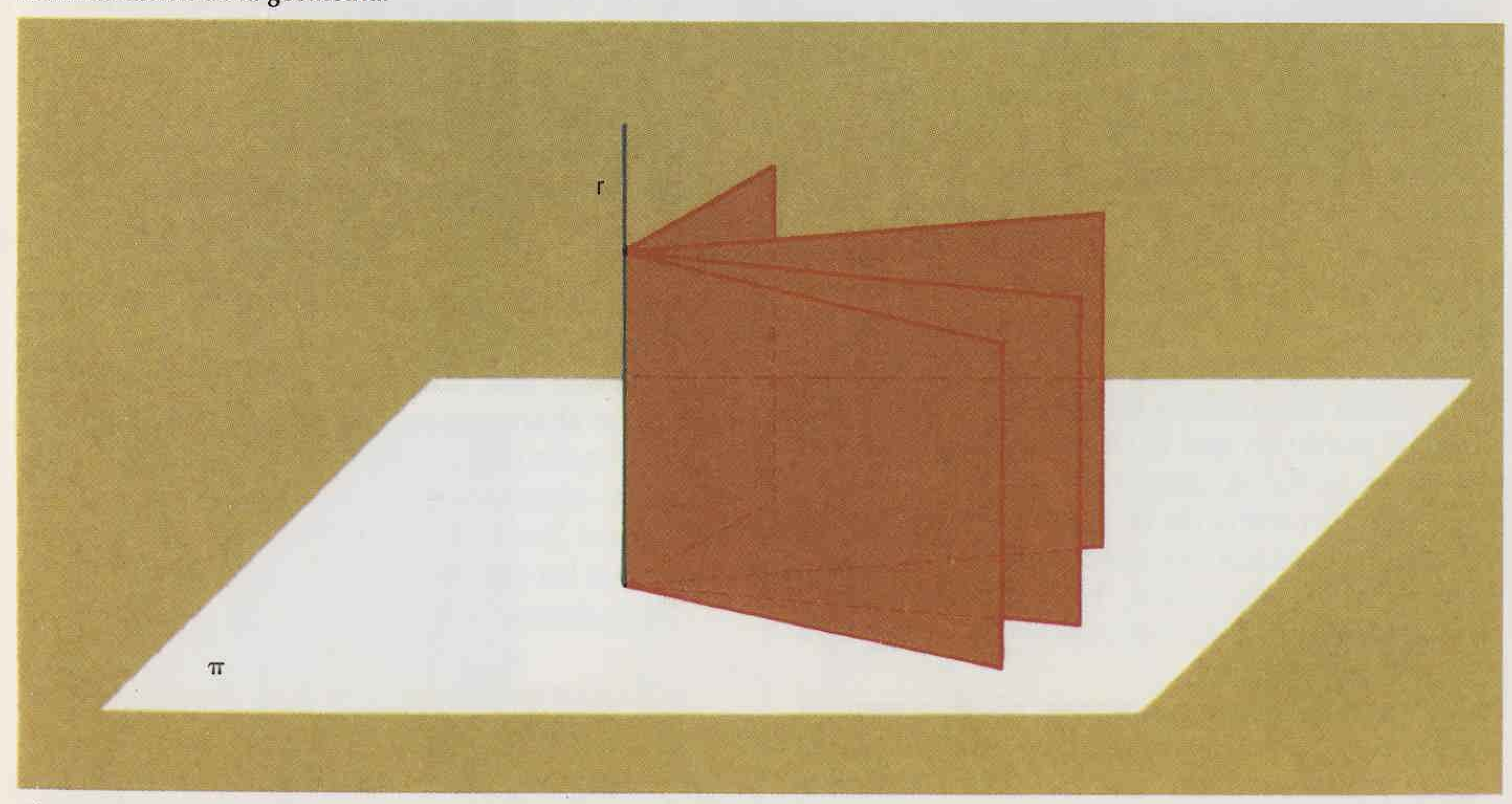


Fig. 4 – Si r es perpendicular a π, todo plano que pase por r es perpendicular a π.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Si C es un punto del plano y r es un número positivo, se llama *circunferencia de centro C* y radio r a la curva formada por los puntos cuya distancia a C es exactamente r. Circunferencias del mismo centro se dice que son *concéntricas* (fig, 5).

El compás es un instrumento ideado para trazar circunferencias: manteniendo la abertura constante, se hinca una punta y la otra describe la curva al girar sobre la primera (fig. 1).

Además de a la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia, también se llama *radio* al segmento que les une. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*, y, si pasa por el centro, *diámetro*. Dos puntos de la circunferencia la dividen en dos porciones, cada una de la cuales se llama *arco* (fig. 2).

Tres puntos no alineados *determinan* una circunferencia, es decir, por ellos pasa una circunferencia y una sola; su centro es el punto de encuentro de las mediatrices (véase B/2) de los segmentos que unen los puntos dados (fig. 3).

Teorema de Tales. Las rectas que unen un punto de la circunferencia con los extremos de un diámetro son perpendiculares (fig. 4 abajo). Recíprocamente, si se tiene un segmento AB, los puntos X tales que XA y XB forman ángulo recto y pertenecen necesariamente a la circunferencia de diámetro AB (fig. 4, arriba).

La porción de plano encerrada por una circunferencia se llama *círculo*. Si C es el centro y r el radio, el círculo está formado por los puntos cuya distancia a C sea r o menos.

La parte de círculo limitada por dos radios y un arco es un *sector circular*, la que limitan una cuerda y un arco es un *segmento circular* y la comprendida entre dos circunferencias concéntricas es una *corona circular* (fig. 6).

Hay tres posibles posiciones de una recta del plano con relación a una circunferencia (fig. 7): que la corte en dos puntos (recta *secante*), en uno (recta *tangente*) o en ninguno (recta *exterior*). El punto en que la circunferencia toca a la tangente se llama *punto de contacto*. El radio que une el centro de la circunferencia con el punto de contacto es perpendicular a la tangente; en consecuencia, hay una y sólo una recta tangente a la circunferencia para cada uno de sus puntos.

Hay también tres posiciones básicas mutuas entre dos circunferencias. Una es que no se corten, pudiendo ser una de ellas exterior o interior a la otra (figs. 8b y 8c). Otra posibilidad es que tengan dos puntos comunes, siendo *secantes* (fig. 8a). Finalmente, cuando las dos circunferencias son tangentes a una recta en un mismo punto, se dice que son *tangentes entre sí*, pudiendo ser una de ellas interna o externa a la otra (figs. 8d y 8e). Debe observarse que en este último caso, el punto de contacto y los dos centros están forzosamente alineados, siendo la recta que les une la perpendicular a la tangente por el punto de contacto. Las posiciones relativas pueden reconocerse al saber los radios y las distancias entre los centros (véase ejercicio B/4-2).

Longitud

La razón entre la longitud L de toda circunferencia y su diámetro d es una constante. Se la denota por la letra griega π (que se lee pi), o sea $\pi = L/d$. El número π es irracional, y tiene por ello infinitos decimales sin ningún período.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

Sin embargo, para aplicaciones prácticas suele ser suficiente tomar la aproximación 3,1416 y a menudo basta incluso con 3,14 (véase ejercicio B/4-8).

Así pues, si d es el diámetro y r el radio

$$\text{long. circunferencia} = \pi \cdot d = 2\pi r.$$

La longidud L de un arco de circunferencia abarcado por dos radios que formen un ángulo de n grados sexagesimales es $L = \pi r n/180$.

Áreas circulares

El área del círculo de radio r es πr^2, la del sector circular de abertura n grados es $\pi r^2 n/360$ y la de la corona circular de radio externo r y radio interno s es $\pi(r^2 - s^2)$.

El área del segmento circular se obtiene sumando o sustrayendo, según convenga (figs. 6d y 6e), la del triángulo CAB a la del sector circular que unido al triángulo da el segmento (véase B/7-1).

RADIÁN

En muchas aplicaciones se toma como unidad de medida de ángulos el de 1 *radián*, que es el que forman dos radios de una circunferencia tales que abarquen un arco que tenga longitud igual al radio (fig. 5). Así pues, una vuelta completa de circunferencia, 360°, serán 2π radianes, al ser $2\pi r$ la longitud de la circunferencia. Se tienen las equivalencias

2π radianes	——	360°
π	——	180°
$\pi/2$ radianes	——	90°
1 radián	——	57° 17′ 45″ (aprox.)

y una regla de tres permite otras equivalencias. Si dos radios forman un ángulo de ω radianes, la longitud y el área del sector son

$$L = \omega r \quad , \quad A = \omega r^2/2.$$

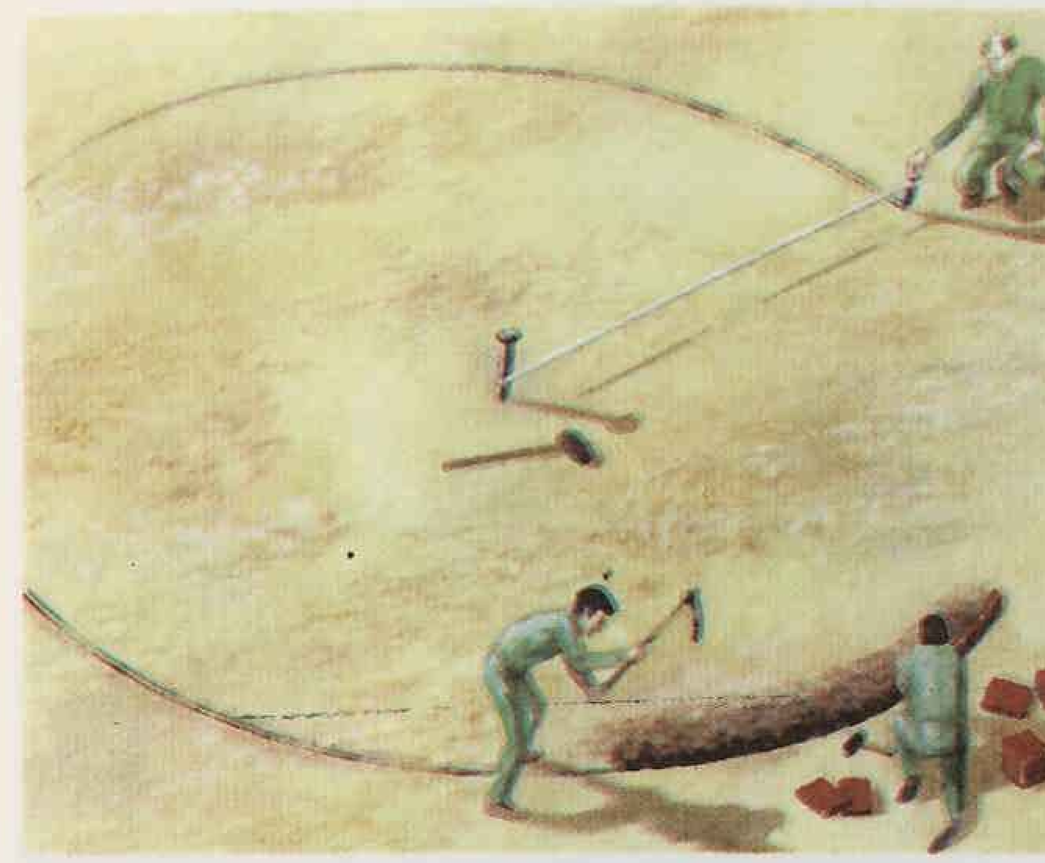


Fig. 1 – Trazado de una circunferencia por jardineros.

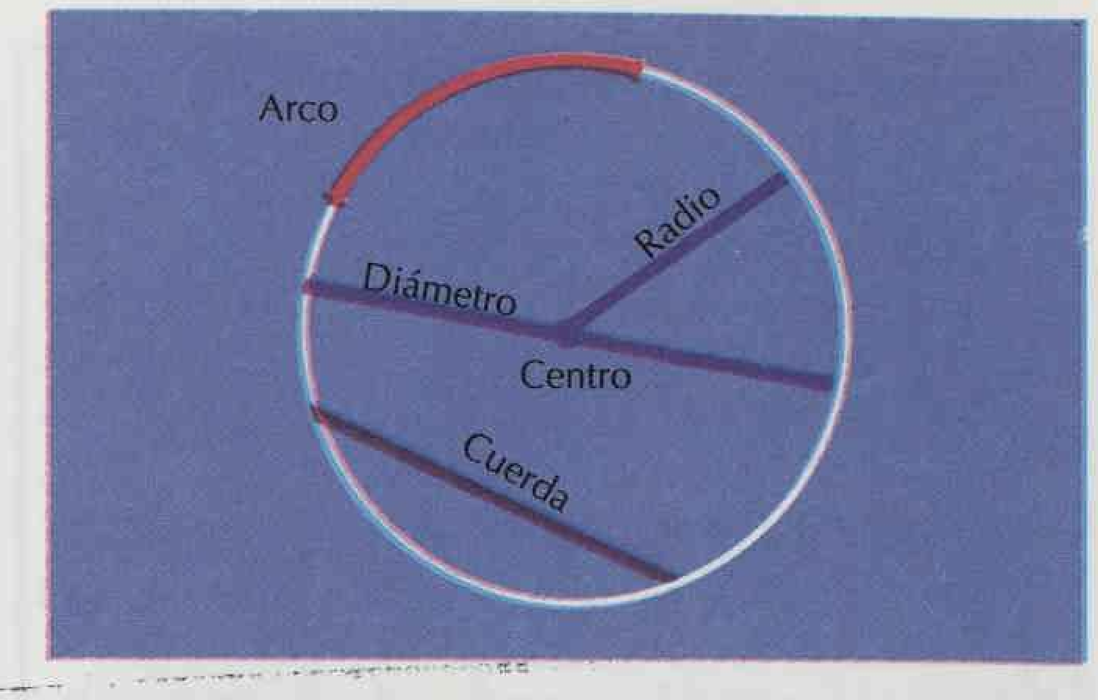


Fig. 2 – Elementos de una circunferencia.

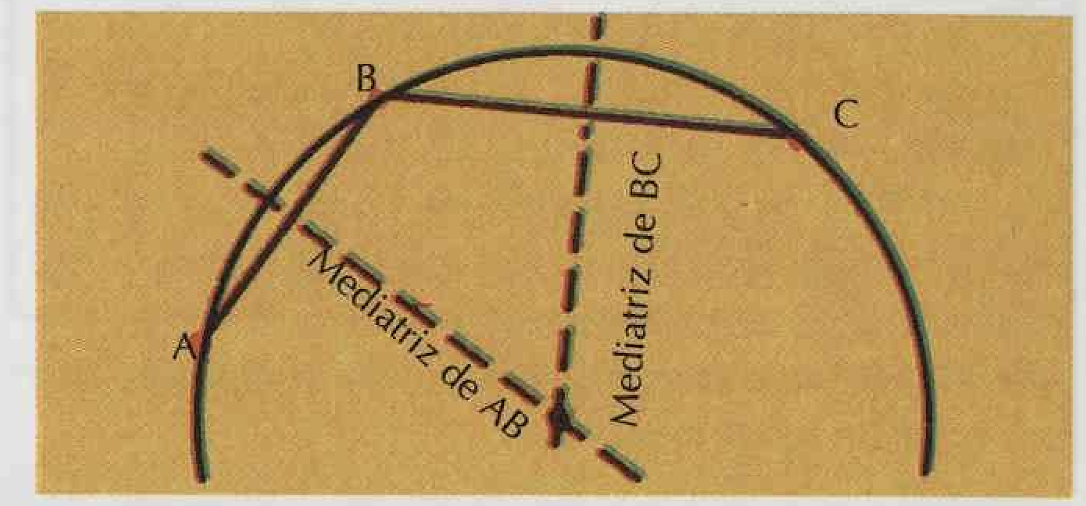


Fig. 3 – Centro de la circunferencia por A, B y C.

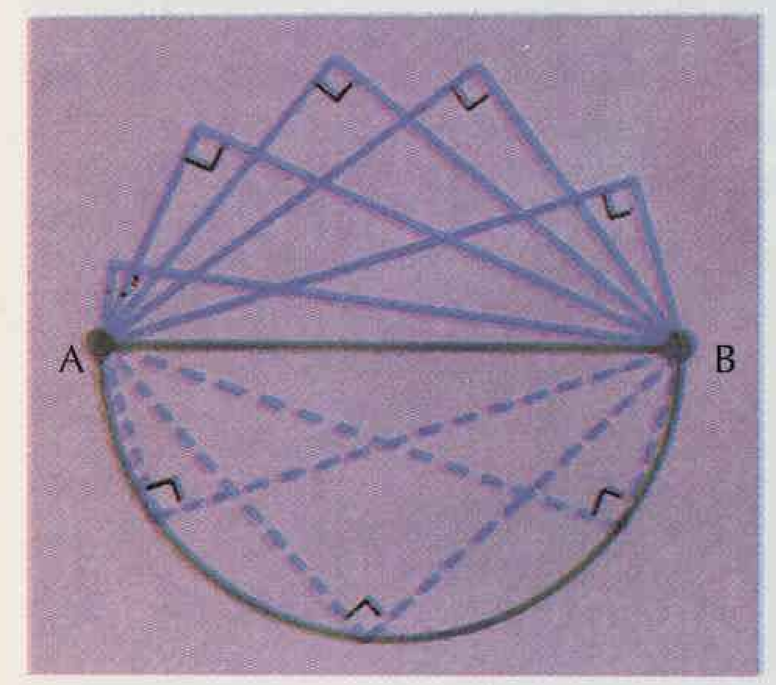


Fig. 4 – Teorema de Tales.

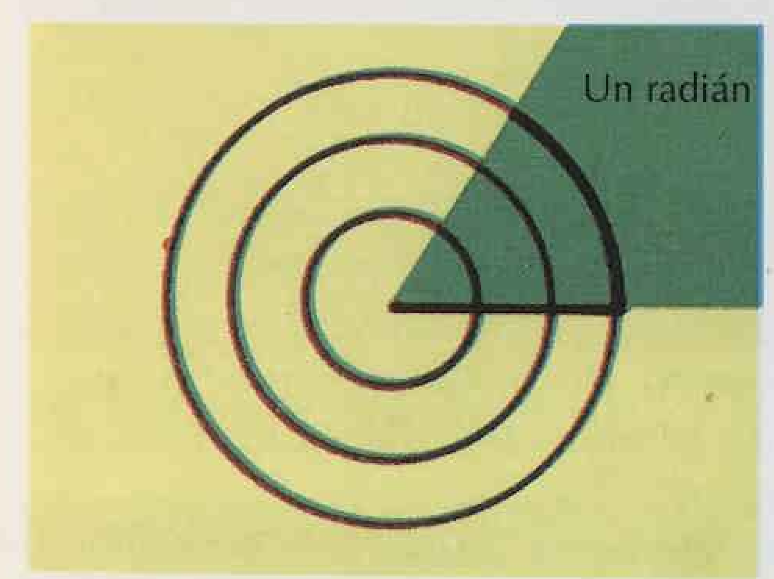


Fig. 5 – Circunferencias concéntricas. Un radián.

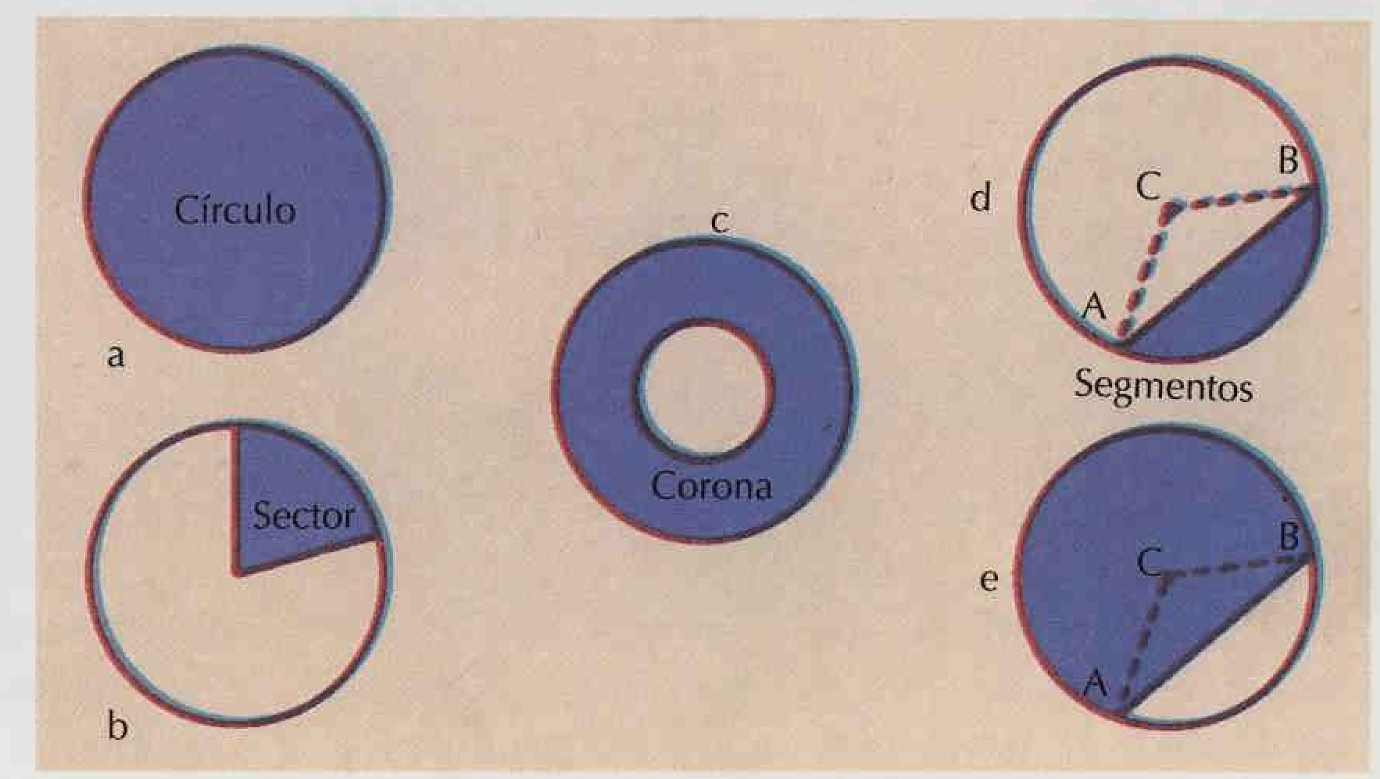


Fig. 6 – Áreas circulares.

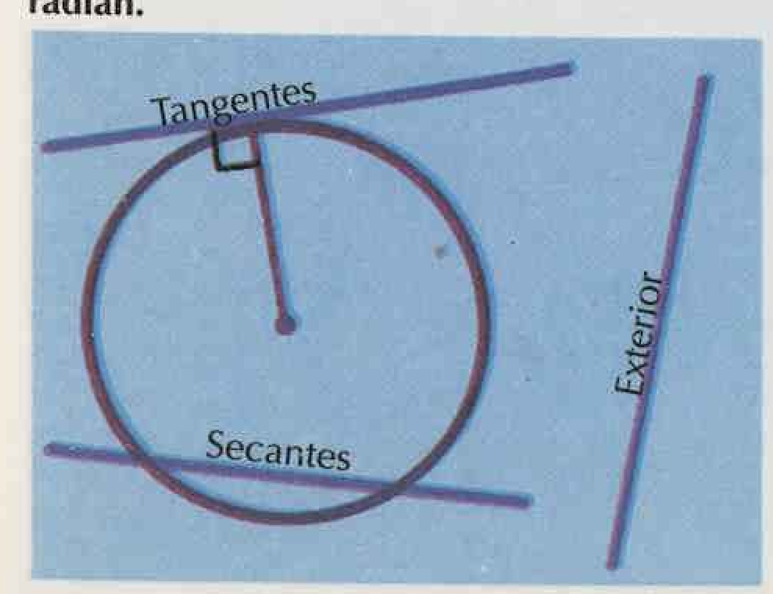


Fig. 7 – Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

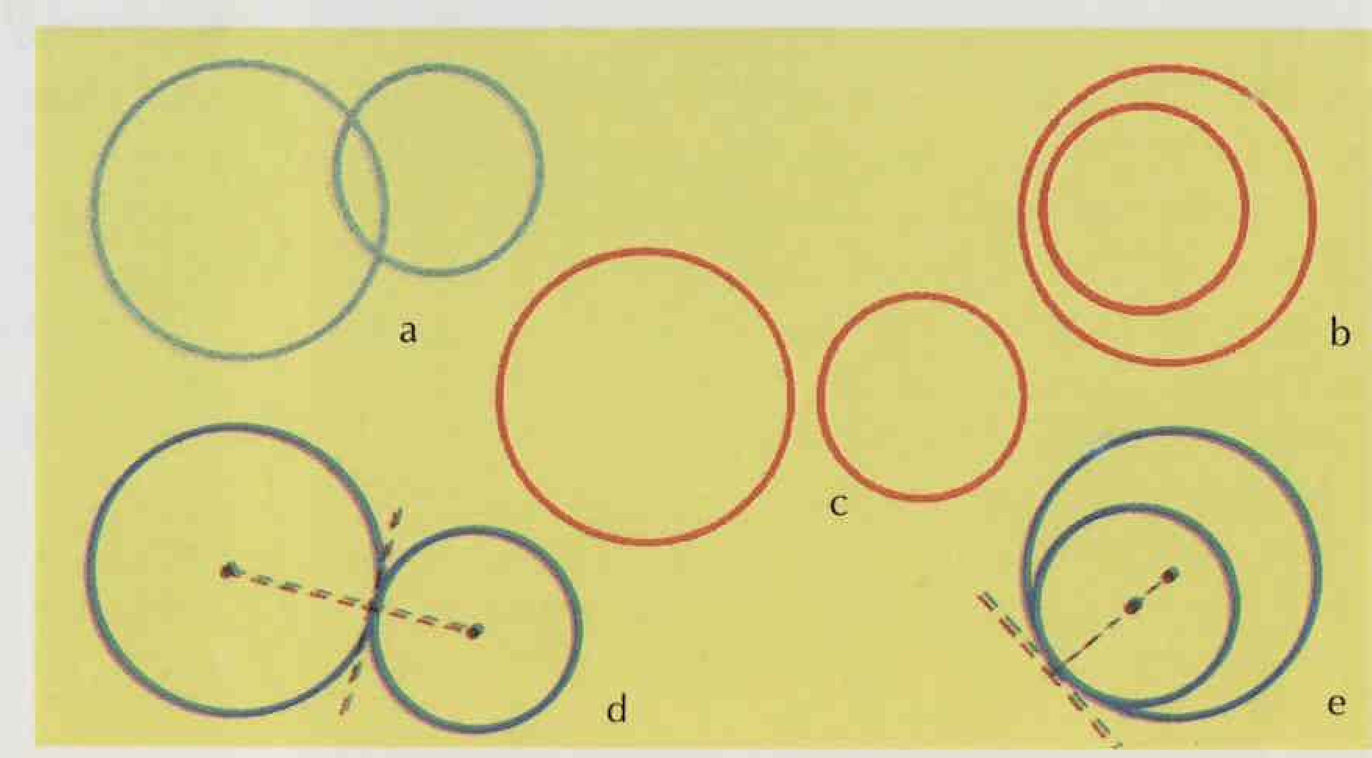


Fig. 8 – Posiciones relativas de dos circunferencias.

TRIÁNGULOS. GENERALIDADES

Definición de triángulo. Dados tres puntos *A, B, C* no alineados, se llama *triángulo de vértices A, B, C* a la unión de los segmentos *AB, BC* y *CB*. También se define como la región plana que delimitan dichos segmentos. Los segmentos *AB, BA* y *CA* —designados por *c, a, b*, respectivamente— se llaman *lados* del triángulo y los ángulos *CAB, ABC* y *BCA* ángulos del triángulo, escritos, al igual que su vértice, *A, B, C*.
Ángulos exteriores de un triángulo son los adyacentes a los ángulos del triángulo.
Relaciones entre los ángulos de un triángulo. La suma de los tres ángulos de un triángulo es un ángulo llano.
Un ángulo cualquiera de un triángulo es el suplementario de la suma de los otros dos.
La medida de todo ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos del triángulo no adyacentes a él.
Un triángulo, como máximo, tiene un ángulo recto o un ángulo obtuso.
Relaciones entre los lados de un triángulo. En todo triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que su diferencia.
Un aspecto importante de esto es la llamada *desigualdad triangular*, que dice que dados tres puntos cualesquiera *A, B, C* se cumple $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, en donde *d* significa *distancia*.
Relaciones entre ángulos y lados. A mayor ángulo se opone mayor lado, y recíprocamente, a mayor lado se opone mayor ángulo.
Nomenclatura y clasificaciones. Atendiendo a las longitudes de sus lados, un triángulo puede ser: *isósceles*, si tiene dos lados congruentes; *equilátero*, si tiene tres lados congruentes y *escaleno* si no tiene lados congruentes. Obsérvese que de las definiciones se deduce que un triángulo equilátero es isósceles.
En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los dos lados congruentes son congruentes. Por tanto, los tres ángulos de un triángulo equilátero son congruentes: cada uno mide 60°.
Atendiendo a las medidas de sus ángulos, un triángulo puede ser: *rectángulo*, si tiene un ángulo recto; *obtusángulo*, si tiene un ángulo obtuso; *acutángulo*, si sus tres ángulos son agudos. Un triángulo es *equiángulo* si tiene los tres ángulos iguales, lo que equivale a que sea equilátero.

Dos triángulos son *iguales* o *congruentes* si tienen los lados y los ángulos respectivamente congruentes. No son necesarias todas estas condiciones para asegurar la congruencia de los triángulos, bastaría con una parte de ellas. En la tarjeta B/11 están expuestos los criterios de congruencia de triángulos.
Dos triángulos se llaman *semejantes* si tienen los ángulos congruentes y los lados proporcionales. Véase también B/11.
Rectas y puntos notables en un triángulo. *Alturas* de un triángulo son las rectas perpendiculares a los lados trazadas desde los vértices opuestos a éstos.
Bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.
Mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados.
Medianas de un triángulo son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Un triángulo tiene, pues, tres alturas, tres bisectrices, tres medianas y tres mediatrices.
En un triángulo isósceles coinciden la altura, la bisectriz, la mediana y la mediatriz correspondientes al lado desigual. En un triángulo equilátero ocurrirá lo mismo, cualquiera que sea el lado considerado.
En todo triángulo las tres alturas se cortan en un punto, llamado *ortocentro*.
En todo triángulo, las tres bisectrices se cortan en un punto, llamado *incentro*, que equidista de los lados del triángulo. El incentro es el centro de la circunferencia tangente interiormente a los lados del triángulo: *circunferencia inscrita* al triángulo (fig. 4).
En todo triángulo, las mediatrices se cortan en un punto, llamado *circuncentro*, que equidista de los tres vértices. En consecuencia, el circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo: *circunferencia circunscrita* (fig. 5).
Por último, en todo triángulo las tres medianas se cortan en un punto, llamado *baricentro*. Si *A* es uno de los vértices, *A'* el punto medio del lado opuesto y *G* el baricentro, se verifica $d(G, A) = 2 \cdot d(G, A')$.
El baricentro es el centro de gravedad del triángulo, de ahí su nombre. Podría, pues, construirse, en un triángulo material homogéneo, dejando el triángulo suspendido alternativamente de cada uno de sus vértices, y marcando sobre su superficie la línea que describiera una plomada, colgada del mismo punto (fig. 2).

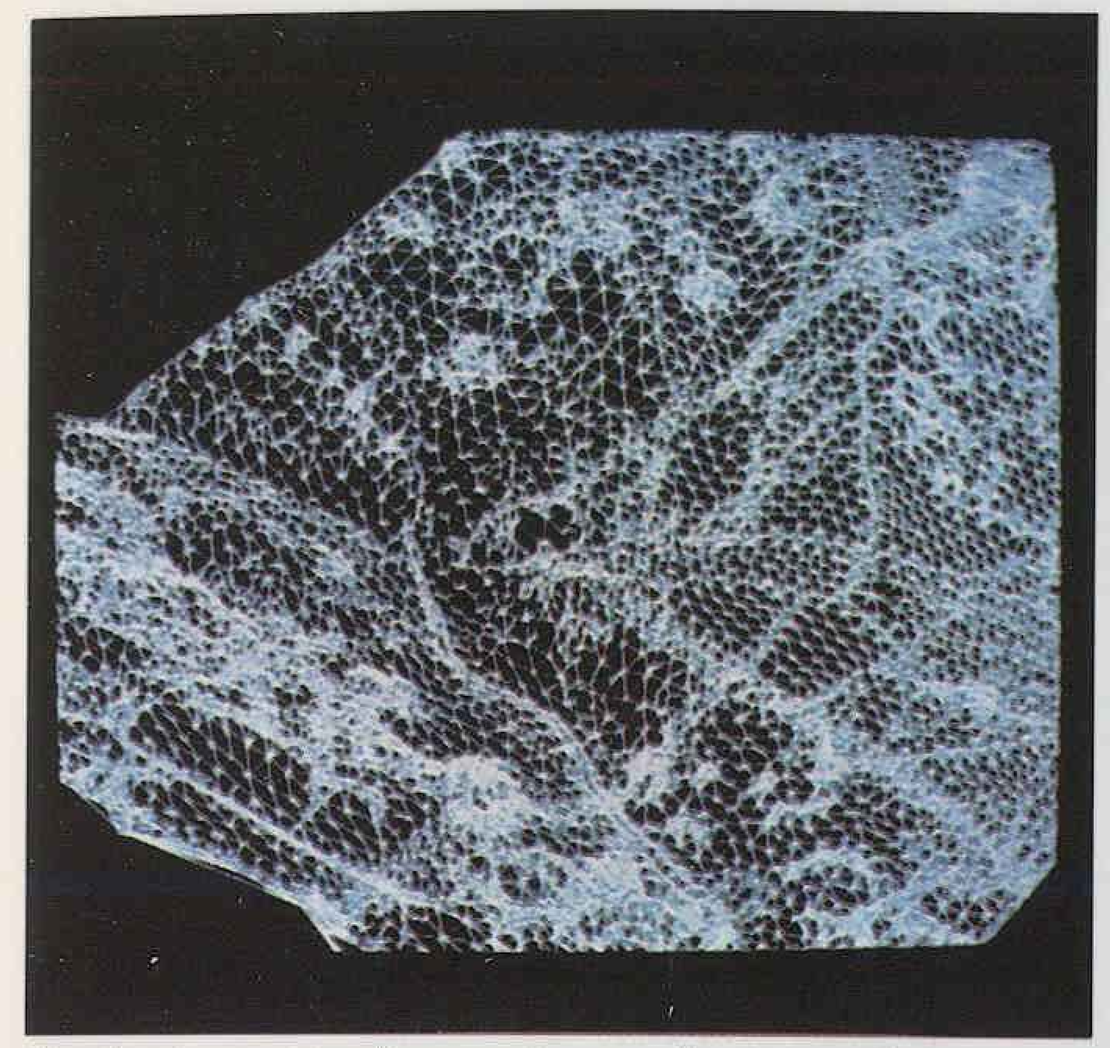


Fig. 1 – La cartografía se realiza usualmente mediante mallas triangulares. (Foto cedida por el Institut Cartogràfic de Catalunya.)

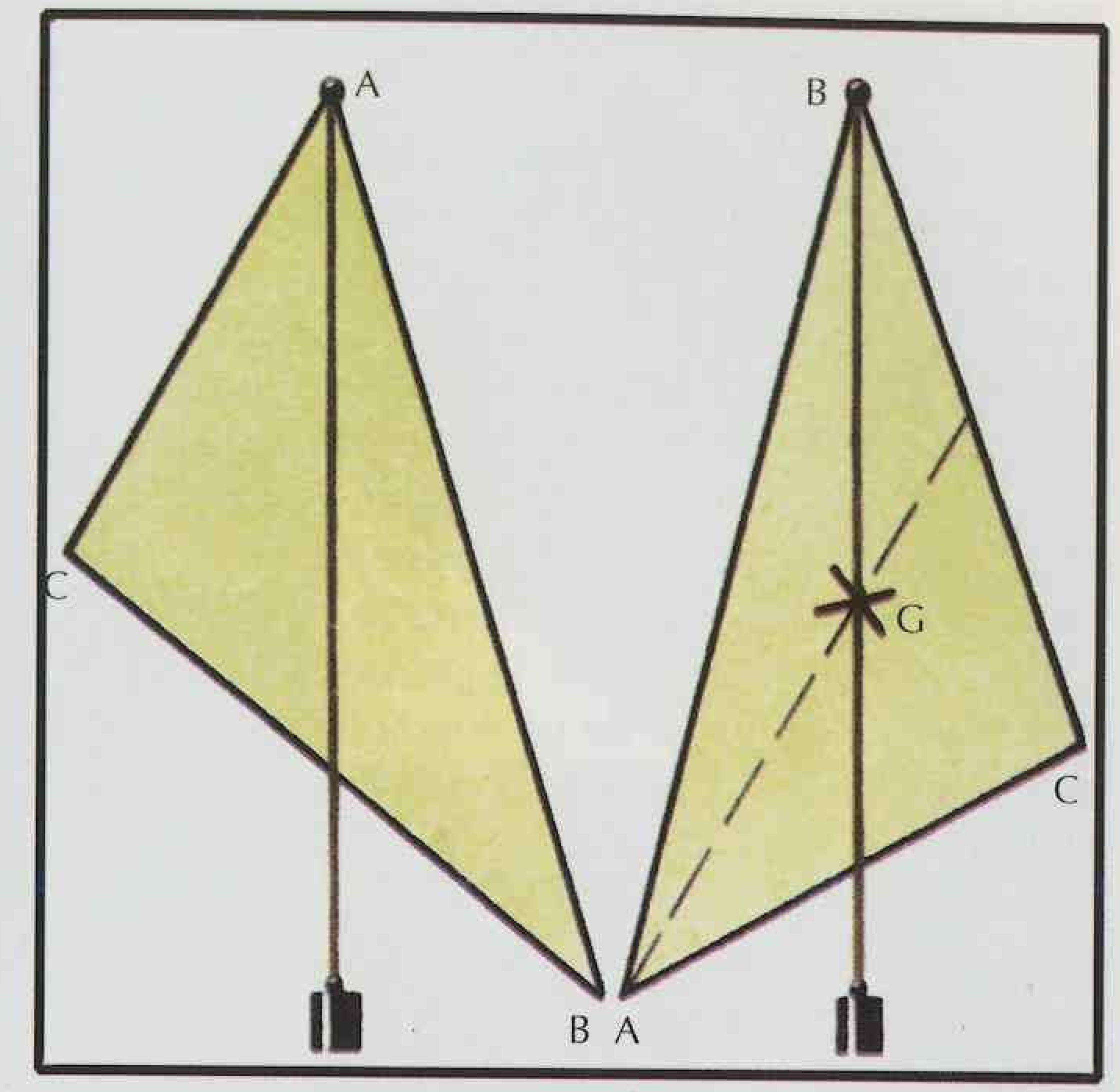


Fig. 2 – Determinación del baricentro mediante una plomada.

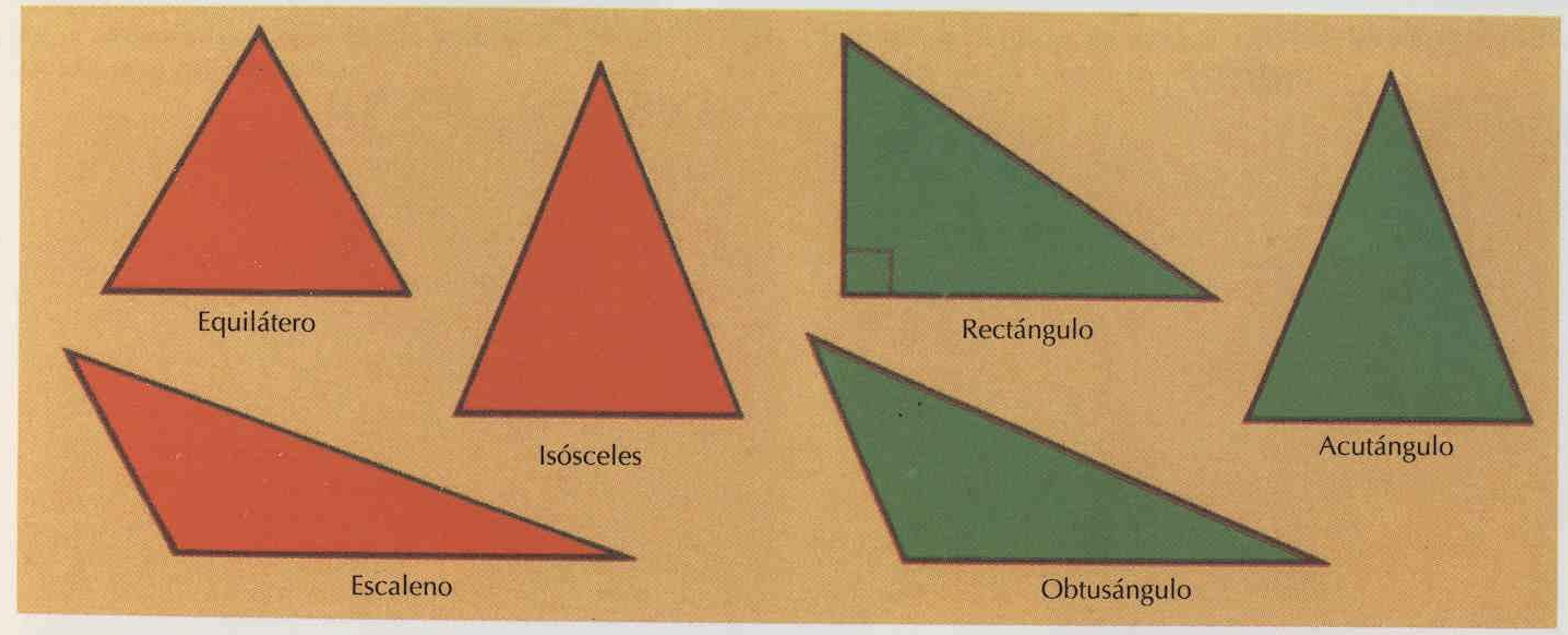


Fig. 3 – Tipos de triángulos.

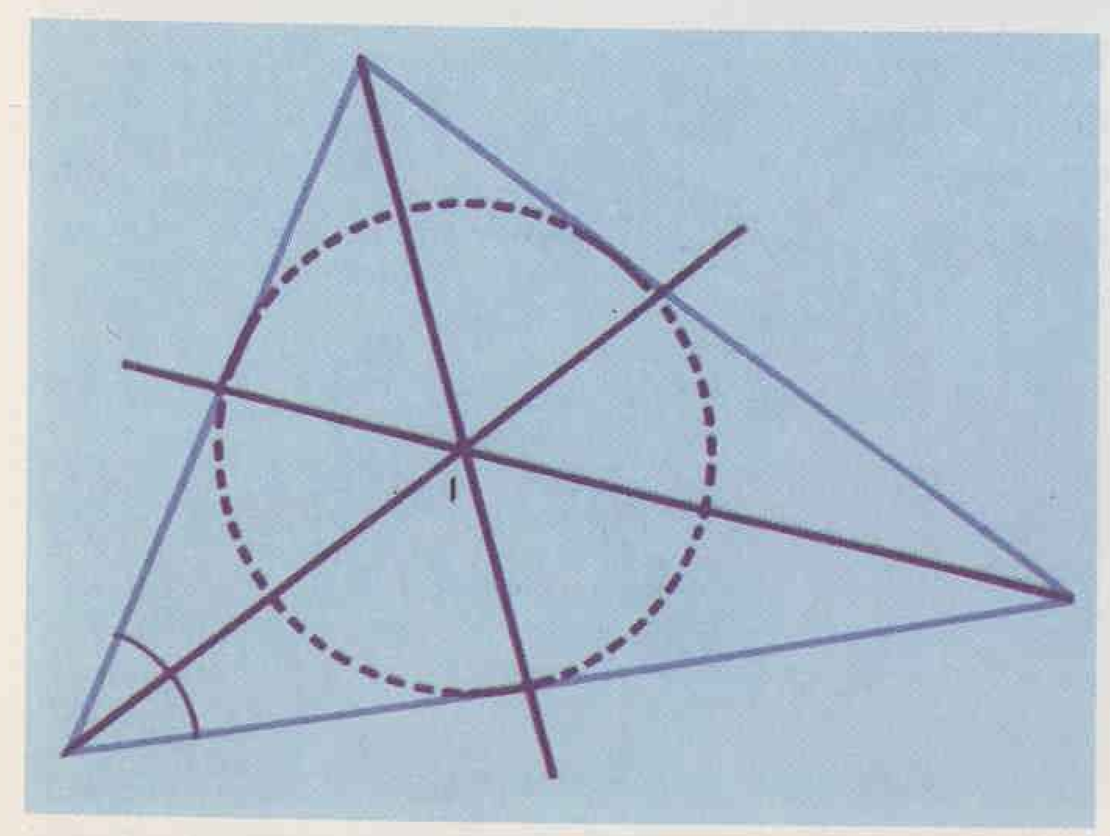


Fig. 4 – Las bisectrices se cortan en I, centro de la circunferencia inscrita.

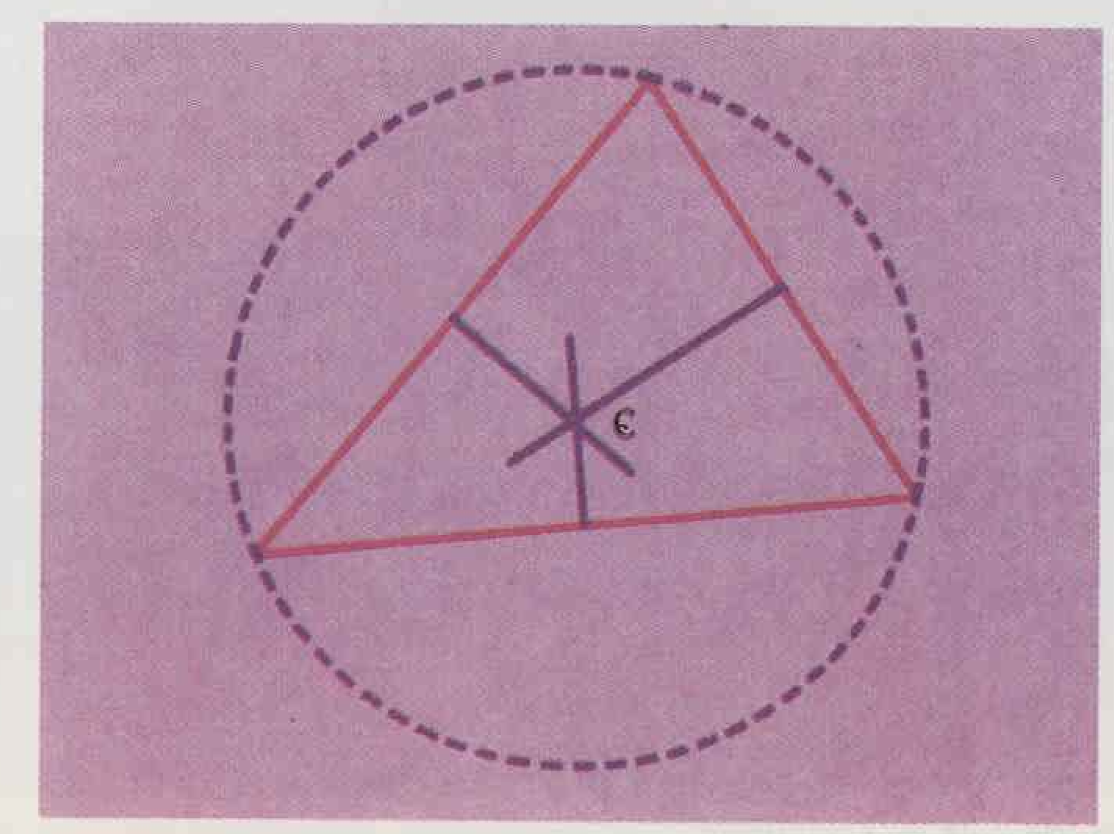


Fig. 5 – Las mediatrices se cortan en C, centro de la circunferencia circunscrita.

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Ya se ha dicho que un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto. Los otros dos ángulos serán, por tanto, complementarios.
Los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el otro *hipotenusa*. En consecuencia, la hipotenusa será mayor que cualquiera de los dos catetos.
Proyección ortogonal, o simplemente, *proyección* de un punto P sobre una recta r es el punto P', intersección de r con la perpendicular a r por P. La proyección de un segmento AB sobre r es el segmento que resulta de proyectar sobre r cada punto del segmento AB.
En lo que sigue, se considerará un triángulo rectángulo de catetos b y c, y de hipotenusa a. La altura sobre la hipotenusa se designa por h, las proyecciones de los catetos b y c sobre a, por m y n, respectivamente (fig. 1a).

Teorema de la altura

La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, es decir

$$h^2 = m \cdot n$$

Teorema del cateto

La longitud de cada cateto es media proporcional entre la longitud de la hipotenusa y la de su proyección sobre ella, es decir:

$$b^2 = m \cdot a \text{ y } c^2 = n \cdot a$$

Teorena de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo. En B/2 se dijo que la distancia de un punto P a una recta r es el segmento de perpendicular limitado por el punto y la recta. Se justificará ahora que tal distancia es la mínima existente entre P y un punto cualquiera Q de r.
Para ello, sea O la intersección de la perpendicular a r por P. Si Q y O son puntos distintos, el triángulo POQ será rectángulo en O, y los segmentos PO y PQ serán, respectivamente, un cateto y la hipotenusa de dicho triángulo. Se tendrá, por tanto, que la longitud de PO será menor que la longitud de PQ.

Construcción de la media proporcional. Basándose en el teorema de la altura, puede construirse, con regla y compás, un segmento x, cuya longitud sea la media proporcional de las longitudes de otros dos segmentos m y n. Para ello, dibujemos un segmento de longitud $m + n$, al que llamaremos MN, y con centro en su punto medio O tracemos una circunferencia, de la cual MN sea un diámetro. Uniendo los extremos de MN con un punto de la circunferencia, obtendremos un triángulo rectángulo (ver B/3), cuya hipotenusa en MN. La altura relativa a dicha hipotenusa será el segmento buscado, x.
En particular, este procedimiento permite construir gráficamente la raíz cuadrada de un número d. Bastará con tomar dos segmentos de longitudes respectivas 1 y d.

TRIÁNGULOS, EN GENERAL

En este apartado se dan diversos resultados para el cálculo de los segmentos de bisectriz, mediana y altura de un triángulo.
Se emplearán las siguientes notaciones:
a, b, c: longitudes de los lados.
m_a, v_a, h_a: longitudes de los segmentos de mediana, bisectriz y altura relativos al lado a, respectivamente. De manera análoga se denotarán los relativos a los demás lados.
b_1 y c_1: segmentos determinados por la bisectriz del ángulo opuesto al lado a sobre este lado (fig. 1b).
p será el semiperímetro del triángulo, es decir, la mitad de la suma de los lados.

Teorema de la bisectriz. La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos de longitudes proporcionales a las de los otros dos lados, es decir:

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$$

En todo triángulo se cumple:

$$m_a = (1/2) \cdot \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}$$

$$v_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp\,(p - a)}$$

$$h_a = (2/a)\,\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

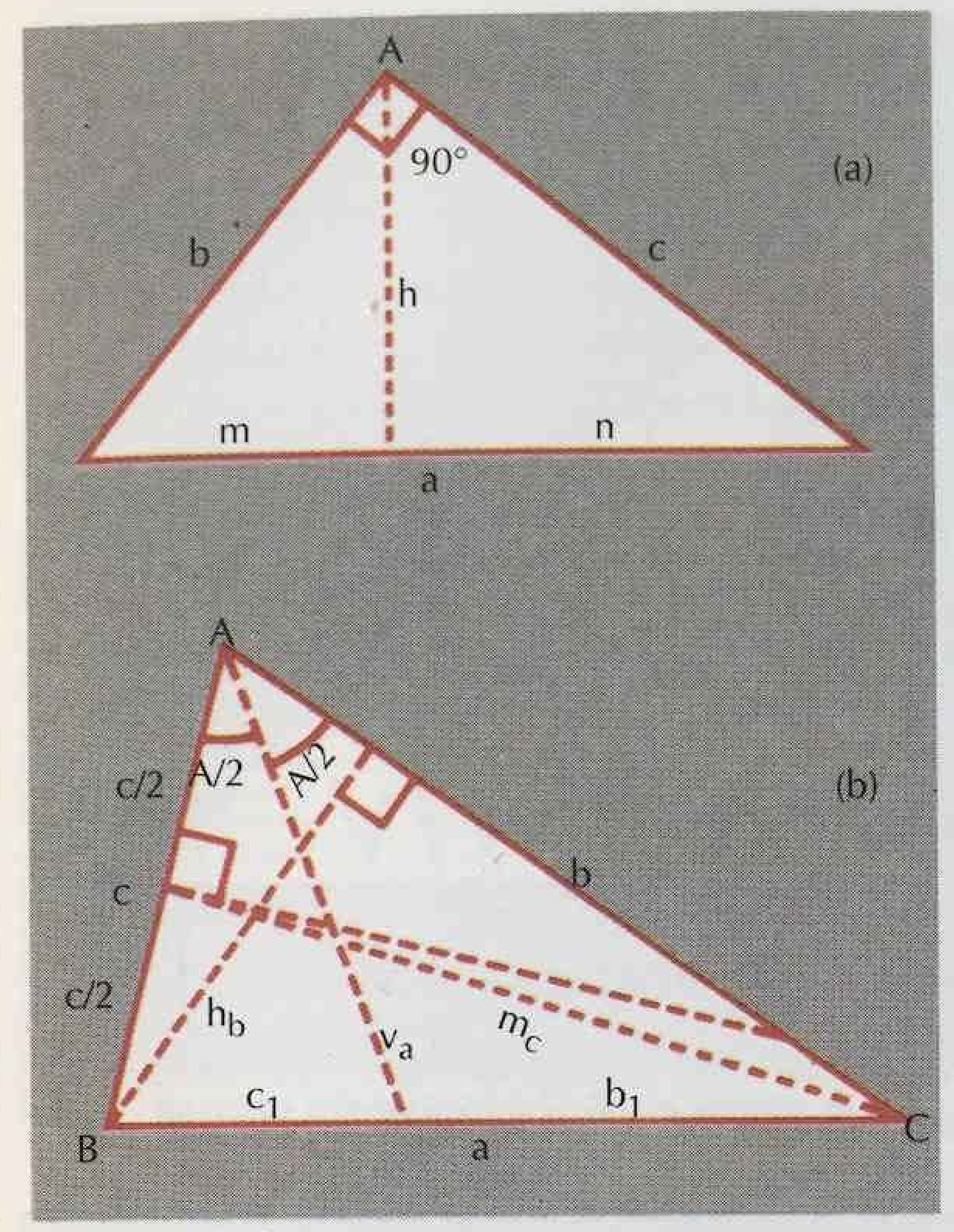


Fig. 1 – Elementos de un triángulo rectángulo (a) y de un triángulo cualquiera (b).

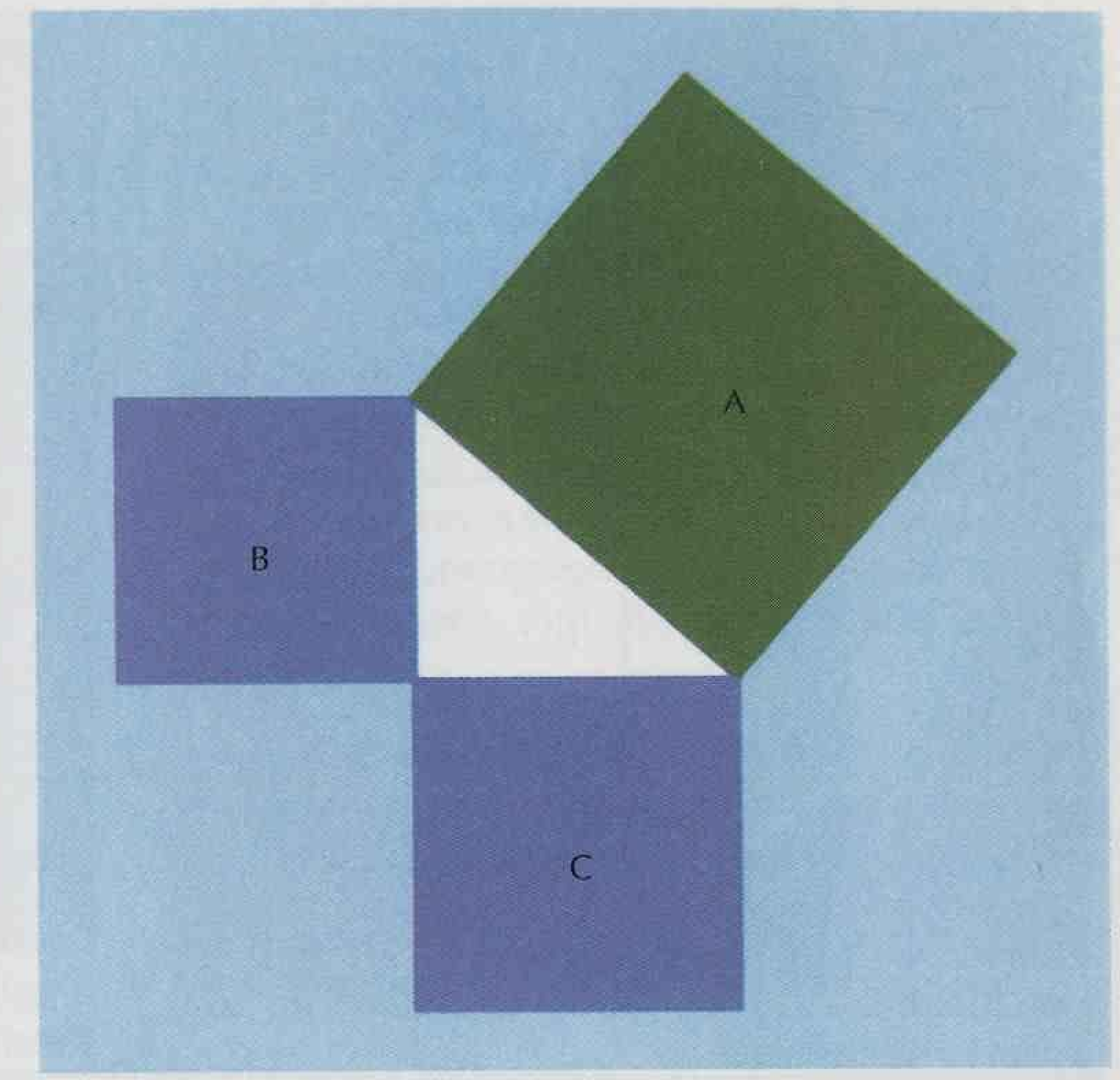


Fig. 2 – Teorema de Pitágoras. La suma de las superficies de los cuadrados B y C coincide con la superficie del cuadrado A.

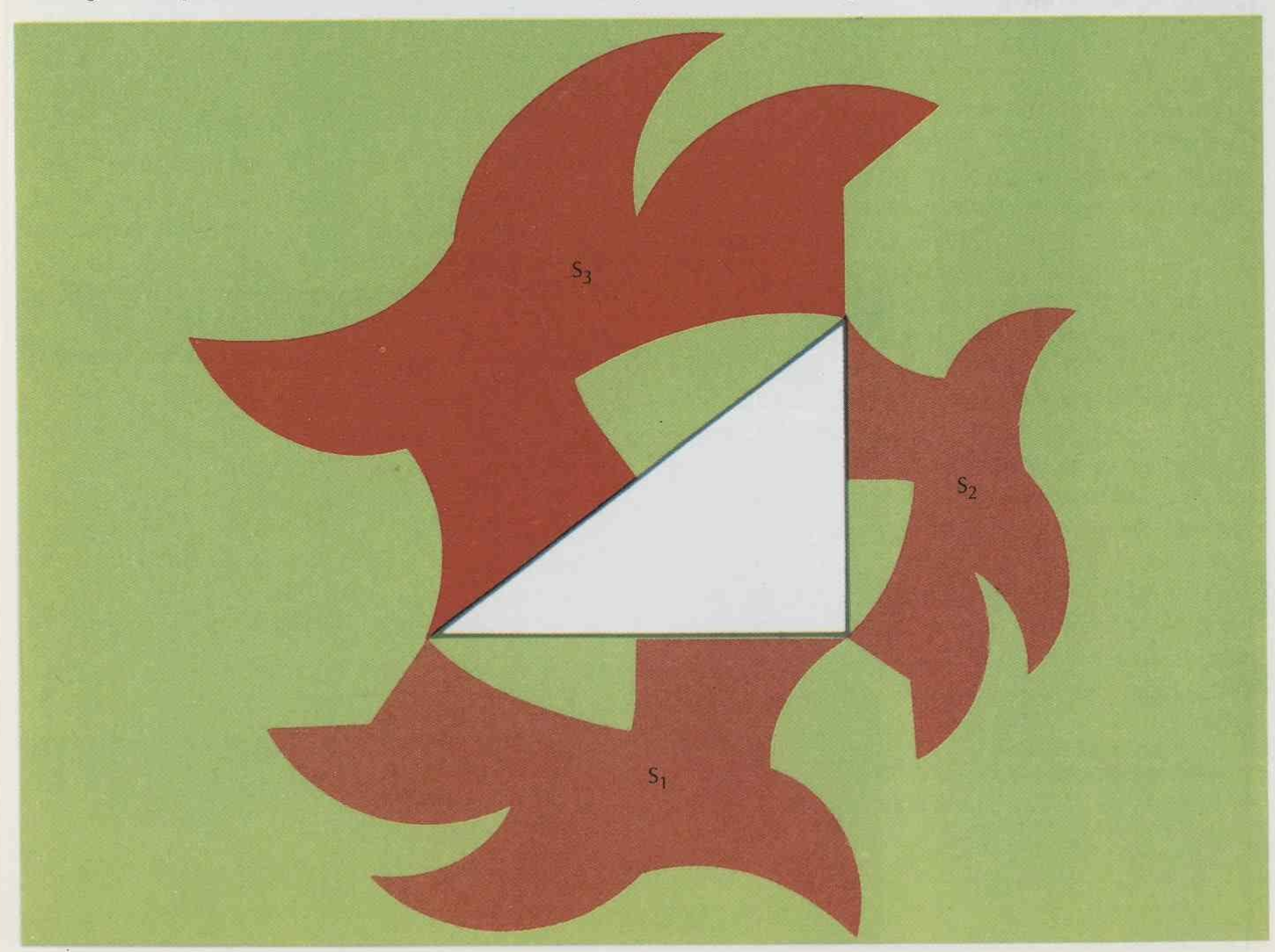


Fig. 3 – Teorema generalizado de Pitágoras. En general, si S_1, S_2 y S_3 son semejantes, la suma de las superficies S_1 y S_2 coincide con la S_3.

TRIGONOMETRÍA. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Dado un ángulo agudo *B*, puede construirse siempre un triángulo rectángulo, de tal forma que uno de sus ángulos sea *B* (fig.1). Si *b* y *c* son, respectivamente, los catetos opuesto y contiguo a *A*, y *a* la hipotenusa del triángulo, se define:
senoB = *b/a*; *cosenoB* = *c/a*; *tangenteB* = *b/c*; *cosecanteB* = 1/*senoB*; *secanteB* = 1/*cosenoB*; *cotangenteB* = 1/*tangenteB*.
Estos seis números se llaman *razones trigonométricas* de *B*, y se designan, abreviadamente, por *senB, cosB, tgB, cosecB, secB* y *cotgB*.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Las definiciones anteriores no dependen de la longitud de los lados del triángulo elegido, en el que se ha dibujado *B*, ya que dos de estos posibles triángulos serán semejantes y, en virtud de la proporcionalidad de sus lados, se obtendrán los mismos números.

Relaciones fundamentales. Para todo ángulo agudo *A*, se verifica:

$$tgA = \frac{senA}{cosA};\quad sen^2A + cos^2A = 1$$

Las definiciones anteriores pueden ampliarse al caso de un ángulo no agudo, de la siguiente forma. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas (C/3) y, centrada en el origen de coordenadas, una circunferencia de radio 1 (fig. 2). Si se toma el ángulo *A* con vértice en *O*, con uno de sus lados la semirrecta *OX*, y se dibuja en *sentido directo* (contrario al movimiento de las agujas del reloj), el otro lado del ángulo cortará a la circunferencia en un punto *P*. Se llaman *senA* y *cosA* a la abscisa y la ordenada, respectivamente, de *P*; *tgA* es el cociente *senA/cosA*. Las demás razones trigonométricas se definen igual que para ángulos agudos. Es claro que, para ángulos agudos, las dos definiciones coinciden y que las relaciones fundamentales son válidas para ángulos cualesquiera.

Fórmulas de adición. Para todo par de ángulos *A* y *B*, se cumplen las siguientes propiedades:

$$sen\,(A \pm B) = senA \cdot cosB \pm cosA \cdot senB,$$

$$cos\,(A \pm B) = cosA \cdot cosB \pm sen\,A \cdot senB,$$

$$tg\,(A \pm B) = \frac{tgA \pm tgB}{1 - tgA \cdot tgB}.$$

Razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad. Para culaquier ángulo *A* son válidas las igualdades siguientes:

$$sen2A = 2senA \cdot cosA,\quad sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - cosA}{2}},$$

$$sen2A = cos^2A - sen^2A,\quad cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + cosA}{2}},$$

$$tg2A = \frac{2tgA}{1 - tg^2A},\qquad tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Elementos de un triángulo son sus lados y ángulos. *Resolver un triángulo* consiste en determinar cuánto miden sus elementos.

Resolución de triángulos rectángulos. Para resolver un triángulo rectángulo, basta con conocer dos elementos del mismo, aparte del ángulo recto. Utilizando el Teorema de Pitágoras y las definiciones de seno, coseno y tangente, puede resolverse cualquier triángulo rectángulo.

Resolución de triángulos de cualquier tipo. Conociendo tres elementos adecuados de un triángulo, puede resolverse con estos teoremas:
Teorema de los senos. En todo triángulo *ABC*, de lados *a, b, c*, se cumple:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Teorema del coseno. En todo triángulo *ABC*, de lados *a, b, c*, se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$$

y fórmulas análogas para los demás lados.

Área de un triángulo. Dado un triángulo cualquiera *ABC*, de lados *a, b, c*, y semiperímetro *p*, las siguientes fórmulas permiten hallar su área, *S*:

$$S = (1/2) \cdot bc \cdot senA = (base \cdot altura)/2,$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\ \text{(Fórmula de Herón).}$$

$$S = \frac{a^2\,senB \cdot senC}{2\,sen\,(B + C)}.$$

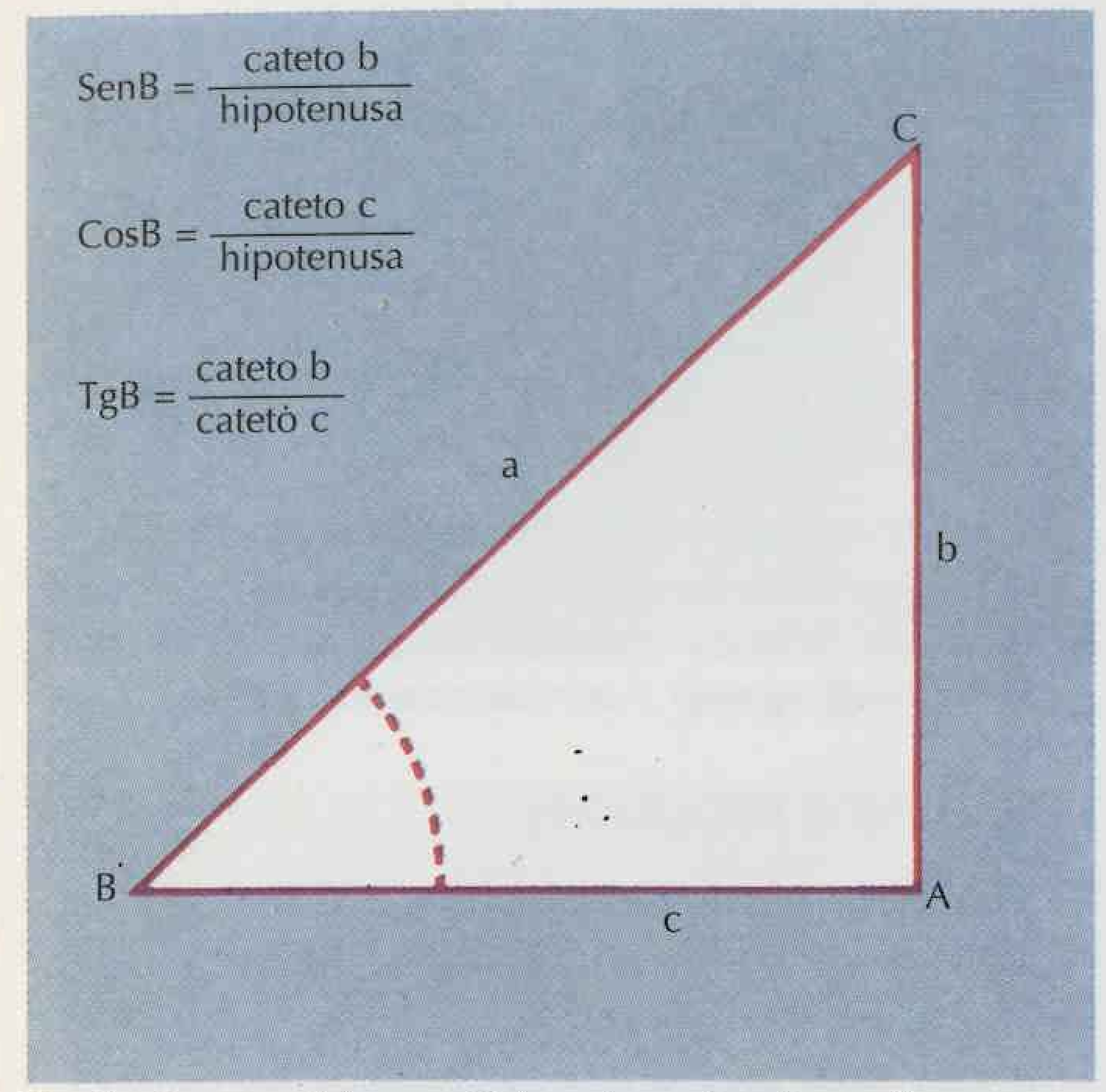


Fig. 1 – Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

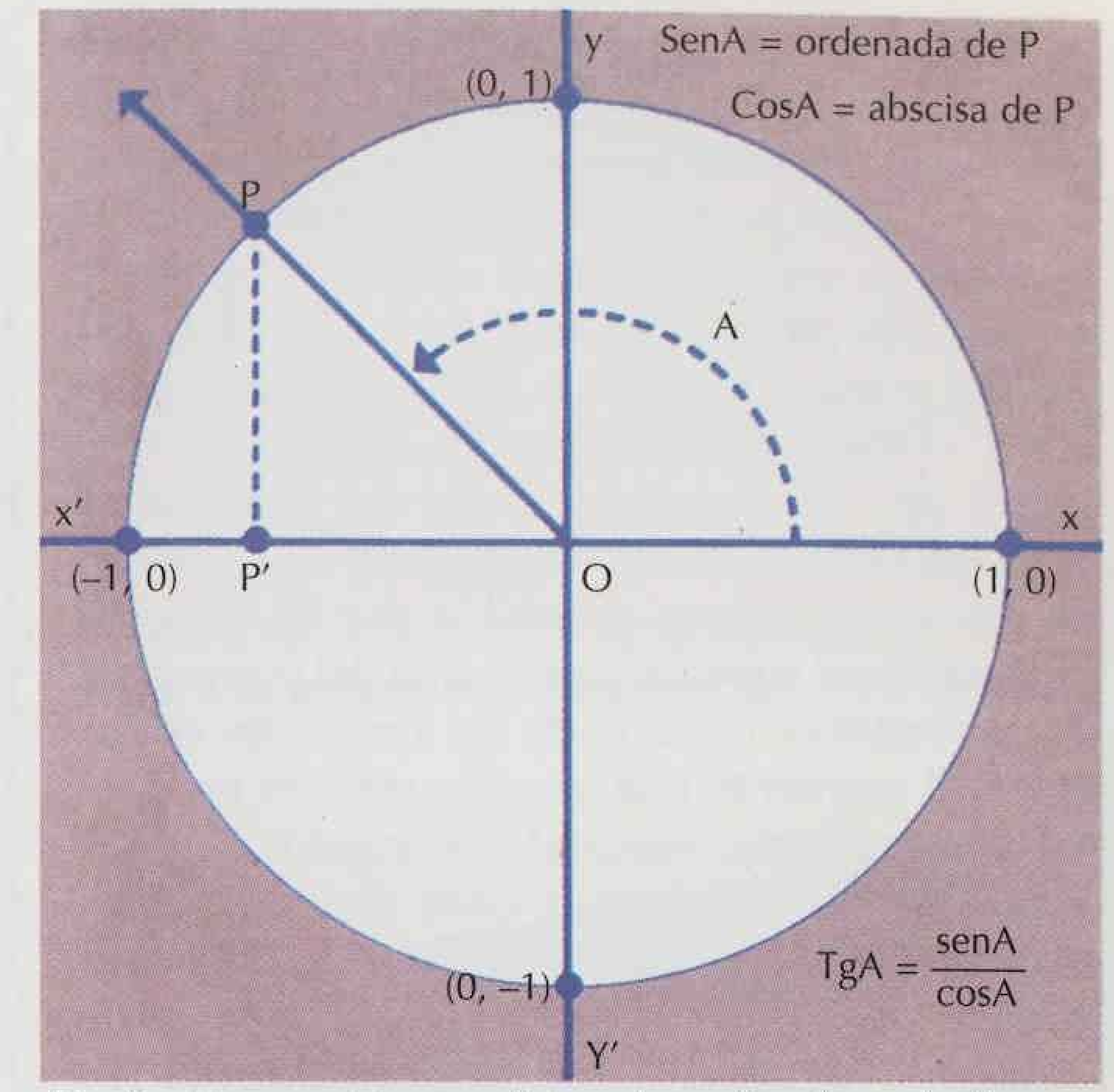
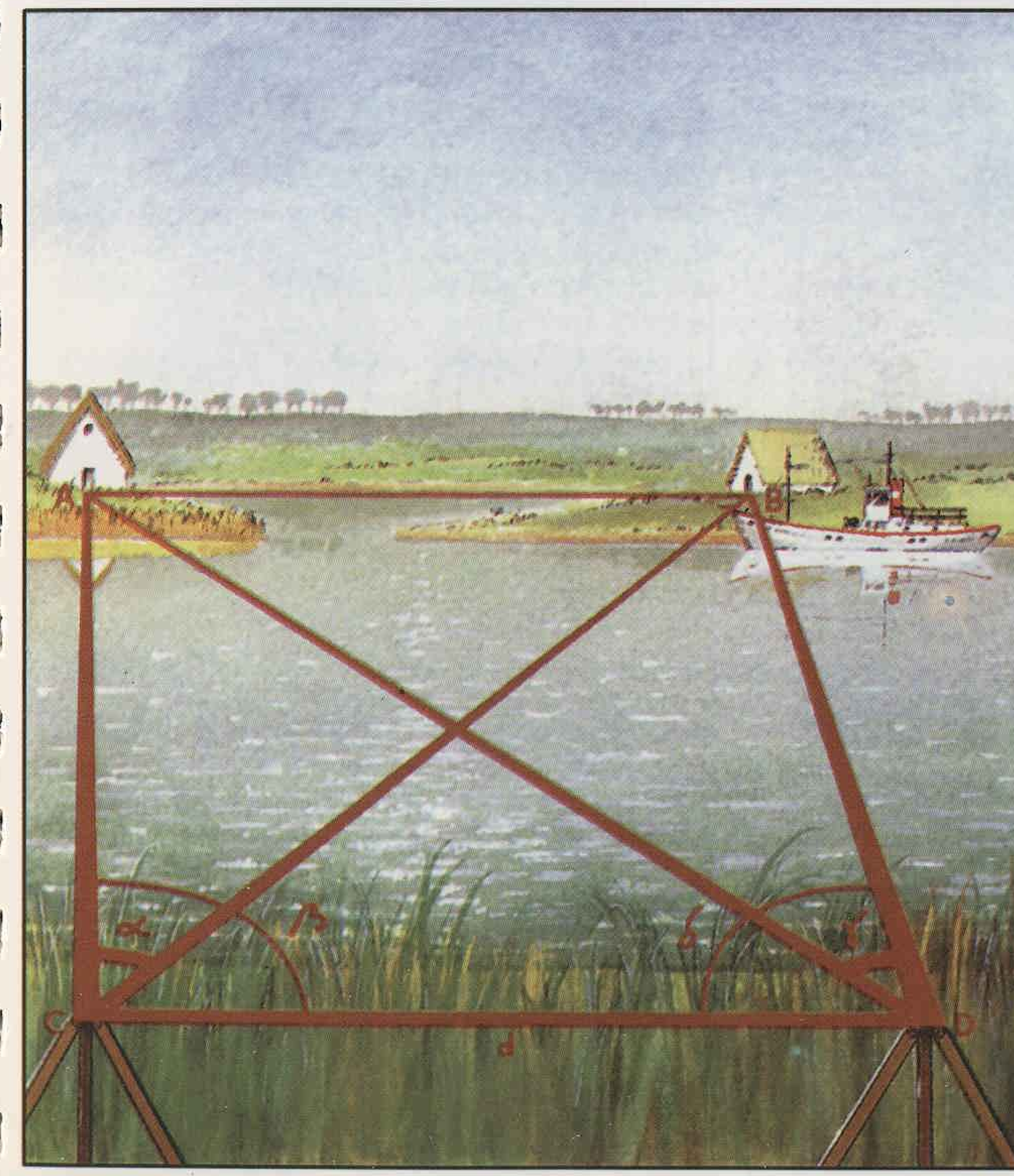


Fig. 2 – Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.



Desde una de las orillas de un río puede calcularse la distancia entre dos puntos de la otra, aplicando los métodos de resolución de triángulos.
Supongamos que quiere hallarse la distancia entre A y B, conocidas $\overline{CD}$ = d y los ángulos α, β, γ, δ. Se tiene que

$$\frac{\overline{AD}}{sen\beta} = \frac{d}{sen\,(\beta + \delta - \gamma)}$$

en $\widehat{ACD}$, aplicando el Teorema de los senos; con lo que obtenemos $\overline{AD}$.

Así mismo en $\widehat{BCD}$:

$$\frac{\overline{BD}}{sen\,(\beta - \alpha)} = \frac{d}{sen\,(\beta + \delta - \alpha)}$$

lo que nos proporciona el valor de $\overline{BD}$.
Finalmente, aplicando el teorema del coseno en el triángulo $\widehat{ADB}$: $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot cos\gamma$.

Fig. 3 – Cálculo de la distancia entre dos puntos no accesibles.

POLÍGONOS

La unión de varios segmentos de modo que el extremo final de cada uno sea el origen del siguiente, sin estar alineados dos consecutivos, se llama *línea poligonal.* A los segmentos se les llama *lados* y a sus extremos *vértices.* Cuando el extremo del último segmento coincide con el origen del primero se tiene un *polígono* o línea poligonal *cerrada* (trataremos sólo el caso en que lados no consecutivos carezcan de punto común). También se llama polígono a la porción de plano que queda encerrada por la línea. La medida de tal superficie es el *área* del polígono y su *perímetro* es la suma de las longitudes de los lados. El segmento que une dos vértices no consecutivos se llama *diagonal.* Los *ángulos del polígono* son los que forman cada dos segmentos consecutivos por el lado interior del polígono. El número de ángulos es igual al de lados y al de vértices. Un polígono es *equilátero* si todos sus lados miden lo mismo y *equiángulo* cuando son iguales todos sus ángulos. Los polígonos de tres lados se llaman *triángulos,* los de cuatro *cuadriláteros;* para los restantes se toma el nombre griego del número de lados más la terminación *gono*: así, el de cinco lados es el *pentágono,* el de seis el *hexágono,* etc.
Se dice que un polígono es *convexo* cuando siempre que se toman dos de sus puntos (de la frontera o del interior), el segmento que les tiene por extremos está dentro del polígono (fig. 3). También puede reconocerse que es convexo viendo que al prolongar cualquiera de sus lados el polígono queda enteramente de un lado de la recta. Se llaman polígonos *cóncavos* a los que no son convexos (fig. 4).
En un polígono de n lados la suma de los ángulos es $2\,(n-2)$ rectos (o sea, $(n-2)\cdot 180$ grados).

CUADRILÁTEROS

Se distinguen los siguientes tipos (fig. 5):

Trapezoides. Cuando no hay dos lados paralelos. Para hallar su área lo mejor es dividirlos en dos triángulos y sumar las áreas de éstos.

Trapecios. Con un par de lados paralelos.
Los lados paralelos se suelen llamar *bases* (fig. 5, B y b) y la longitud del segmento de perpendicular entre ellos es la *altura* (fig. 5, h). Su área es

$$(B + b)\cdot h/2$$

Paralelogramos. Con dos pares de lados paralelos.

Todos los lados son ahora *"bases"* (aunque se suele llamar así a la que se dibuja horizontal e inferiormente). Su área es $b \cdot h$.

Rectángulos. Paralelogramos con los cuatro ángulos rectos.
Su área es *base por altura,* que en este caso coincide con el producto $a \cdot b$ de los lados.

Rombos. Paralelogramos con los cuatro lados iguales.
Aunque pueden tratarse como paralelogramos, si se tiene de datos las diagonales D y d, el área es $D \cdot d/2$.

Cuadrados. Rectángulos de lados iguales.
Si el lado mide a, el área es a^2.

Obsérvese que los rectángulos son equiángulos, pero, en general, no equiláteros, al contrario que los rombos. Son los cuadrados quienes cumplen ambas condiciones.

POLÍGONOS REGULARES

Se dice que un polígono es *regular* cuando es equilátero y equiángulo. Por ejemplo, el cuadrilátero regular es el cuadrado.
El ángulo de un polígono regular de n lados mide $180\,(n-2)/n$ grados. Por ejemplo, el del triángulo equilátero es de $180\,(3-1)/3 = 60°$, el del cuadrado es de $180\,(4-2)/4 = 90°$, el del pentágono regular es de $180\,(5-2)/5 = 108°$, etc.
Las mediatrices de los lados de un polígono regular concurren en un punto llamado *centro* del polígono (fig. 6), en el que también concurren las bisectrices de los ángulos del polígono. Se llama *apotema* al segmento —o a su longitud—, que une el centro con el punto medio de cualquier lado. La apotema es perpendicular al lado.
La circunferencia de centro el del polígono y radio la apotema es tangente a los lados en su punto medio: es la *circunferencia inscrita* en el polígono, el cual la *circunscribe.* La circunferencia de centro el del polígono y radio la distancia a cualquier vértice, pasa por todos los otros vértices: es la *circunferencia circunscrita* al polígono, el cual está *inscrito* en ella.
Al marcar en una circunferencia puntos que la dividan en arcos de igual longitud, si se unen mediante segmentos consecutivos se obtiene un polígono regular inscrito; si en vez de ello se traza la tangente en cada uno de tales puntos, se obtiene un polígono regular circunscrito. Es interesante observar que el lado del hexágono inscrito en una circunferencia coincide con el radio de la misma.
El área de todo polígono regular puede hallarse mediante la fórmula

$$(\textit{perímetro} \times \textit{apotema})/2.$$

Si cada lado de un polígono regular de n lados mide a, el radio r de la circunferencia inscrita, el radio R de la circunscrita y el área S pueden hallarse mediante $\alpha = 360°/2n$.

$$r = a/(2\operatorname{tg}\alpha),\ R = a/(2\operatorname{sen}\alpha).$$
$$S = a^2 n/(4\operatorname{tg}\alpha).$$

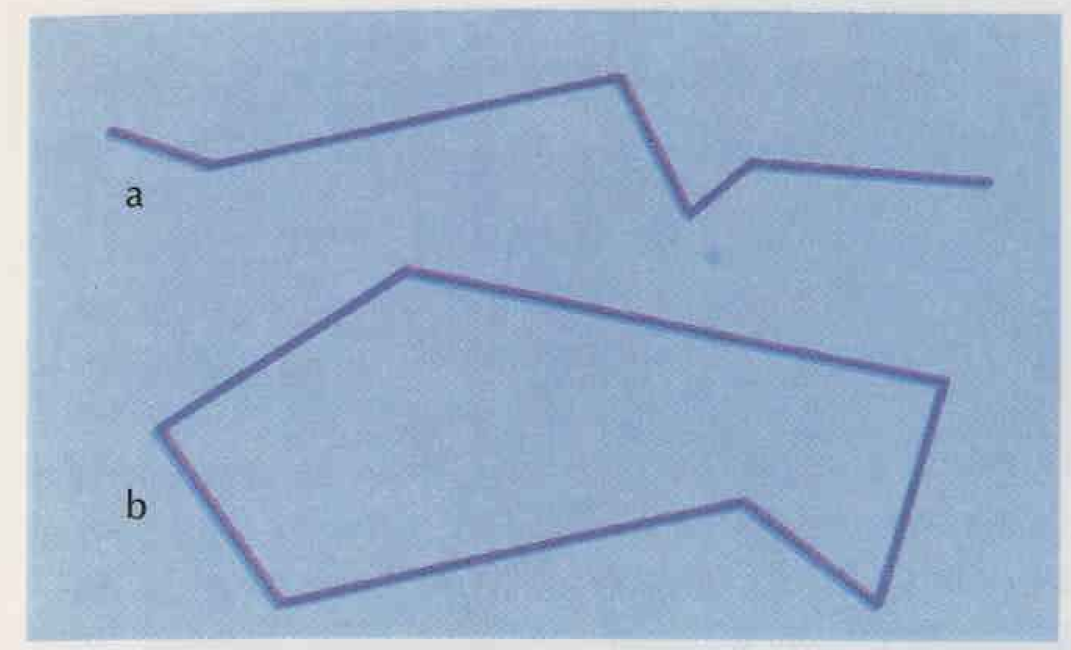


Fig. 1 – a, línea poligonal abierta; b, línea poligonal cerrada.

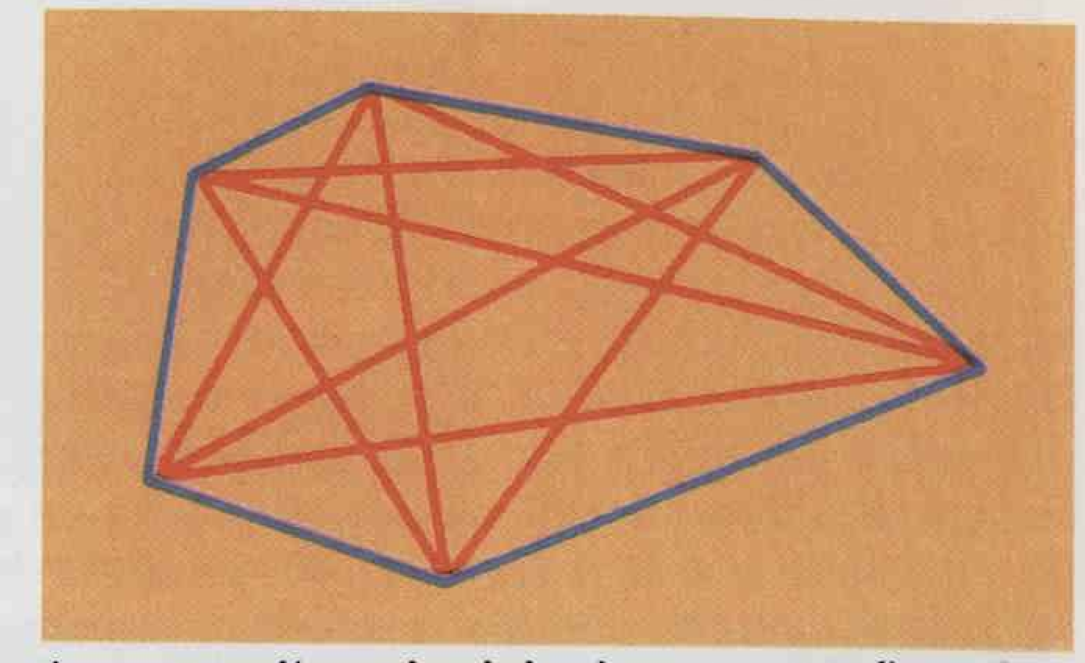


Fig. 2 – Un polígono de n lados tiene n(n – 3)/2 diagonales.

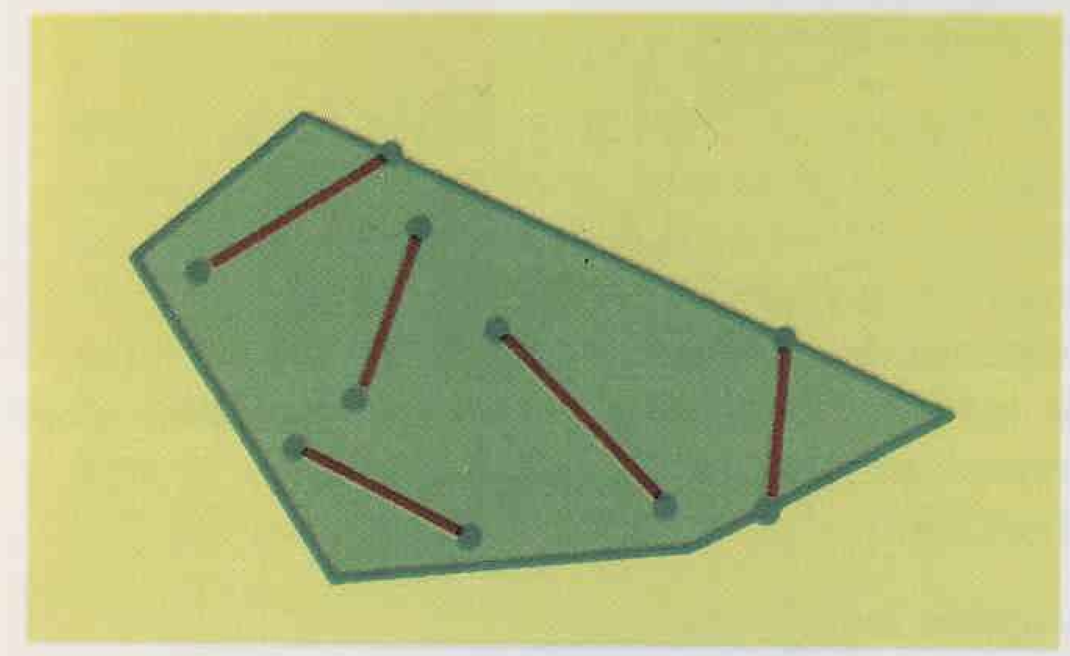


Fig. 3 – Polígono convexo.

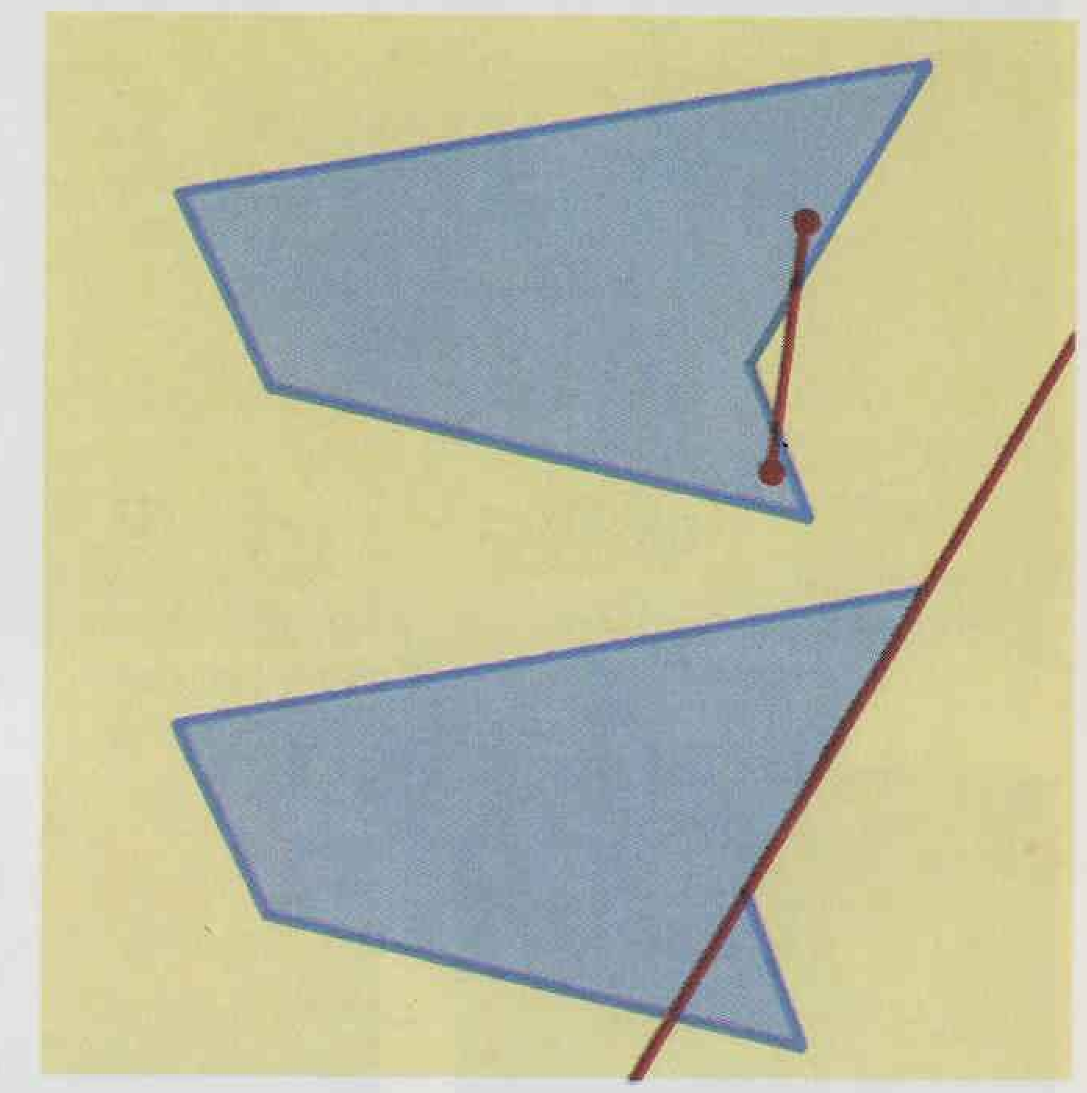


Fig. 4 – Polígono cóncavo.

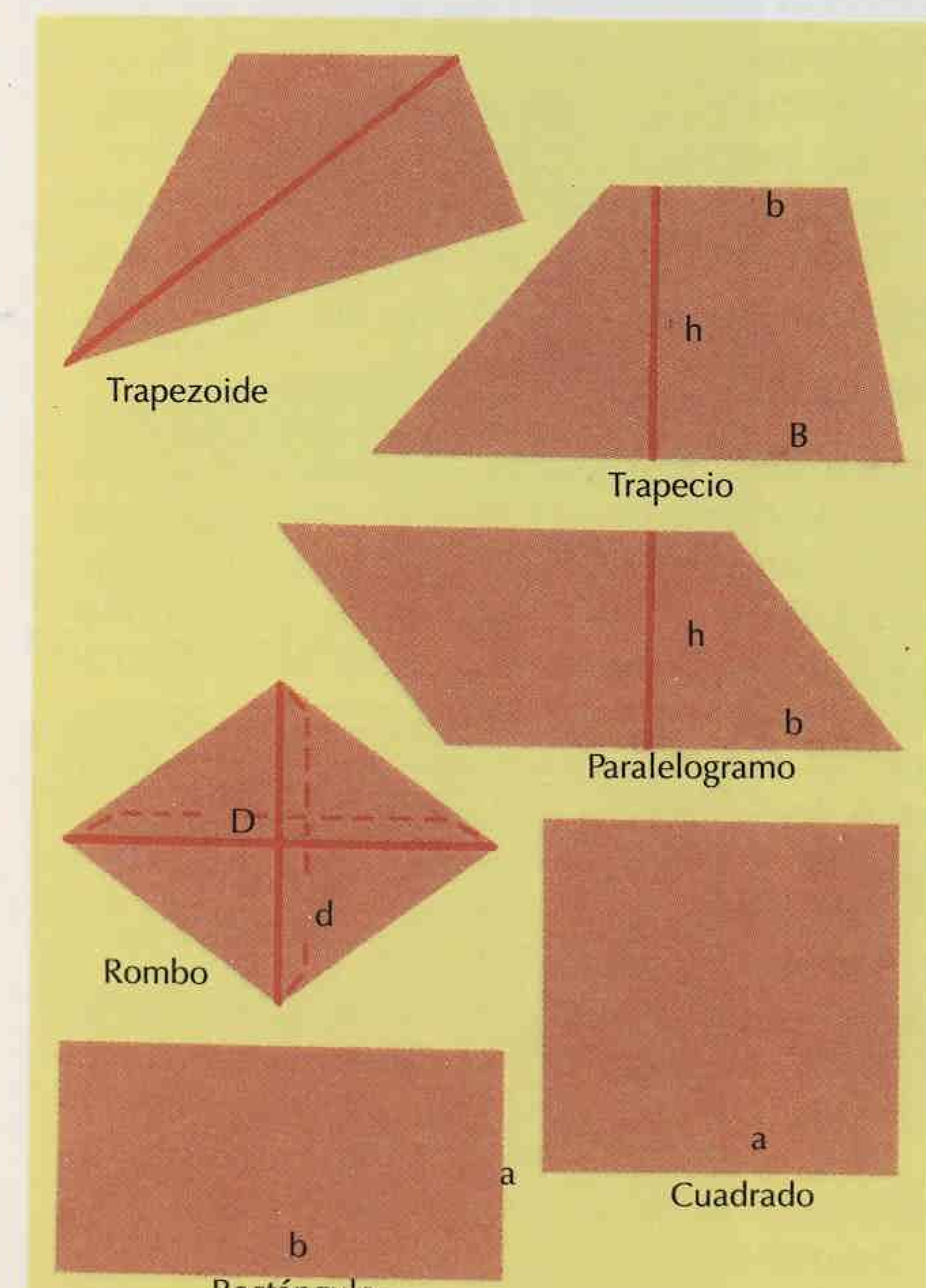


Fig. 5 – Cuadriláteros.

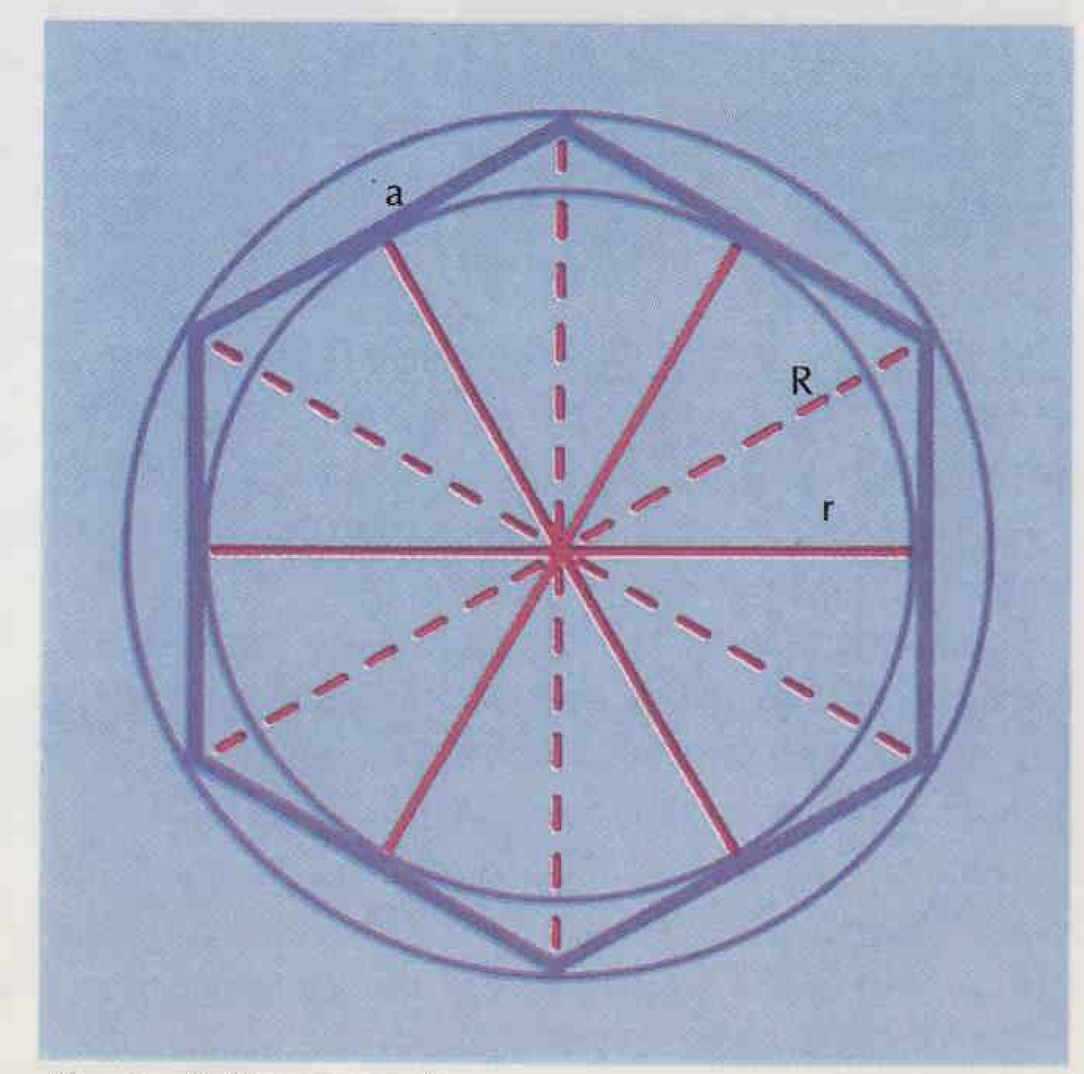


Fig. 6 – Polígono regular.

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ángulos centrales

Se llama *ángulo central* de una circunferencia a todo aquel cuyo vértice sea el centro de la misma. El *arco correspondiente* de circunferencia es el que se halla en el interior de dicho ángulo (fig. 1). La abertura del ángulo es directamente proporcional a la longitud del arco abarcado, de modo que estas magnitudes se relacionan por una regla de tres: si el radio de la circunferencia es r, como a 180° le corresponde un arco de longitud πr, a n grados le corresponde uno de longitud $\frac{\pi r n}{180}$.

La correspondencia es aún más fácil con la medida en radianes, pues un ángulo que mide un radián abarca un arco de longitud r; uno de x radianes tendrá un arco correspondiente de longitud

$$\text{long} = x \cdot r.$$

• **Ejemplo.** En una circunferencia de radio 5 metros se tiene un ángulo central cuyo arco correspondiente mide 2 metros. ¿Cuánto mide el ángulo?

Será $$2 = \frac{\pi \cdot 5 \cdot n}{180}$$

o sea $n = \frac{72}{\pi} = (22{,}9183)° \simeq 22°\ 55'\ 6''$

y en radianes

$$2 = x \cdot 5 \quad , \quad x = 0{,}4 \text{ radianes}$$

Ángulos inscritos

Un ángulo cuyo vértice sea un punto de una circunferencia y sus lados sean secantes a la misma se dice que está *inscrito* en la circunferencia. Los puntos de la circunferencia interiores al ángulo son el *arco abarcado* correspondiente (fig. 2).

Teorema. Un ángulo inscrito mide la mitad que el ángulo central que abarca el mismo arco (fig. 3).

Corolario. Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco, miden lo mismo (fig. 4).

• **Ejercicio.** Demuéstrese que si un cuadrilátero tiene sus vértices sobre una circunferencia (es decir, está inscrito en ella), entonces cada par de ángulos opuestos suman un llano.

En esta situación los ángulos opuestos α y β del cuadrilátero están inscritos en la circunferencia, por lo que valen la mitad de los centrales γ y δ que abarcan, respectivamente, igual arco. Tendremos

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{360°}{2} = 180°.$$

La proposición recíproca también es cierta (véase Ejercicio B/9-1).

Ángulos semiinscritos

Un ángulo se dice que está *semiinscrito* en una circunferencia cuando su vértice es un punto de la misma, un lado es secante y otro tangente (fig. 5). Los puntos de la circunferencia interiores al ángulo constituyen el *arco abarcado* correspondiente.

Teorema. Todo ángulo semiinscrito mide la mitad que el ángulo central que abarca el mismo ángulo.

Ángulos interiores

Un ángulo es *interior* a una circunferencia cuando su vértice es un punto interior a ella. Los puntos de la circunferencia interiores al ángulo son el arco abarcado (fig. 6).

Teorema. Un ángulo interior mide la semisuma de los ángulos centrales que corresponden al arco abarcado por él ángulo interior y al arco abarcado por su opuesto por el vértice (fig. 7).

Ángulos exteriores

Un ángulo es *exterior* a una circunferencia cuando lo es su vértice y los lados son secantes o tangentes a la misma. Los puntos de la circunferencia en el interior del ángulo constituyen dos *arcos abarcados* (véase fig. 8).

Teorema. Un ángulo exterior mide la mitad de la diferencia entre los centrales que corresponden a sus arcos abarcados (fig. 9).

Arco capaz

Sea AB un segmento (fig. 10). Los puntos del plano desde que se ve el segmento según un ángulo dado α constituyen sendos arcos de circunferencia con AB como cuerda, a cada uno de los cuales se llama *arco capaz* del ángulo α sobre el segmento AB. Para construirlo se procede del siguiente modo: se forma el ángulo α con A como vértice y un lado sobre la semirrecta de A a B; la perpendicular r (por A) al otro lado del ángulo corta a la mediatriz de AB en el centro del arco (fig.11).

Una aplicación clásica del arco capaz es el Problema de Pothénot. Desde un junto V del terreno se pueden divisar tres lugares notables A, B y C, y medir los ángulos horizontales α y β que unen V con las verticales A, B y B, C, respectivamente. Entonces el observador puede situar su propia posición en un mapa en que aparezcan A, B y C, pues es el punto común al arco capaz de α sobre el segmento AB y al arco capaz de β sobre el segmento BC (fig. 12).

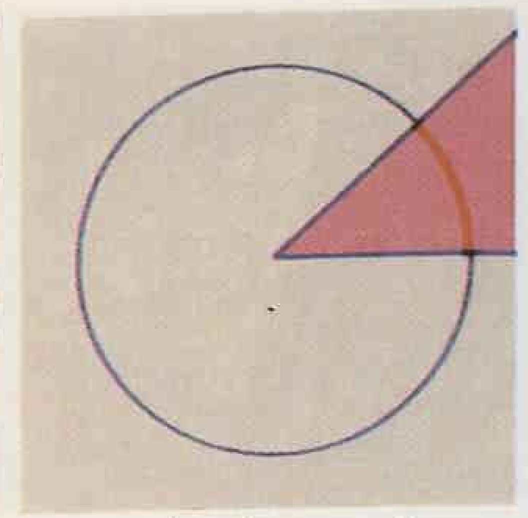


Fig. 1 – Ángulo central.

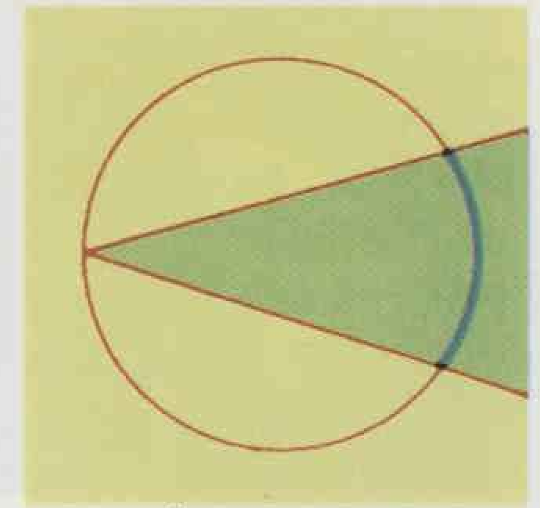


Fig. 2 – Ángulo inscrito.

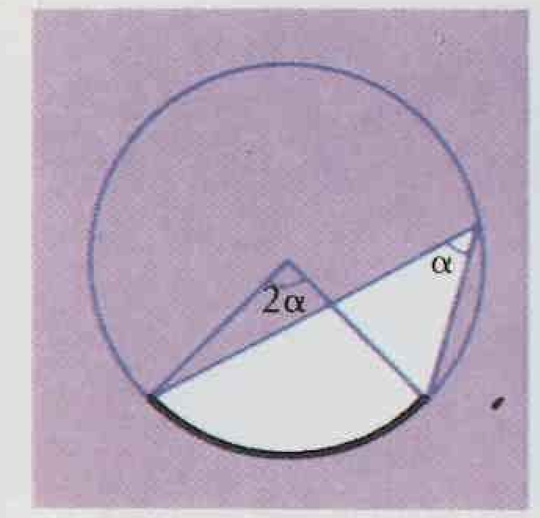


Fig. 3 – Relación ángulo central - ángulo inscrito.

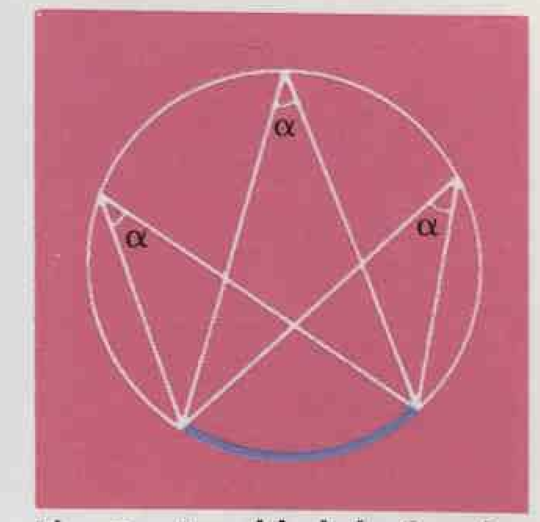


Fig. 4 – Igualdad de ángulos inscritos.

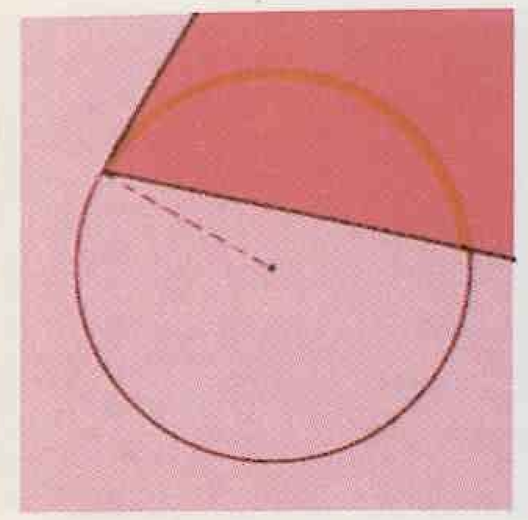


Fig. 5 – Ángulo semiinscrito.

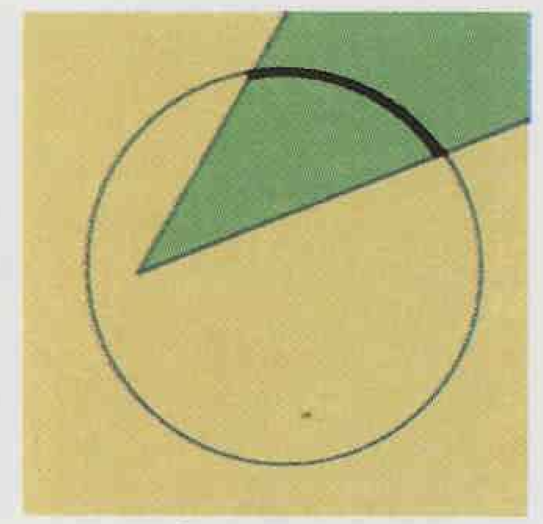


Fig. 6 – Ángulo interior.

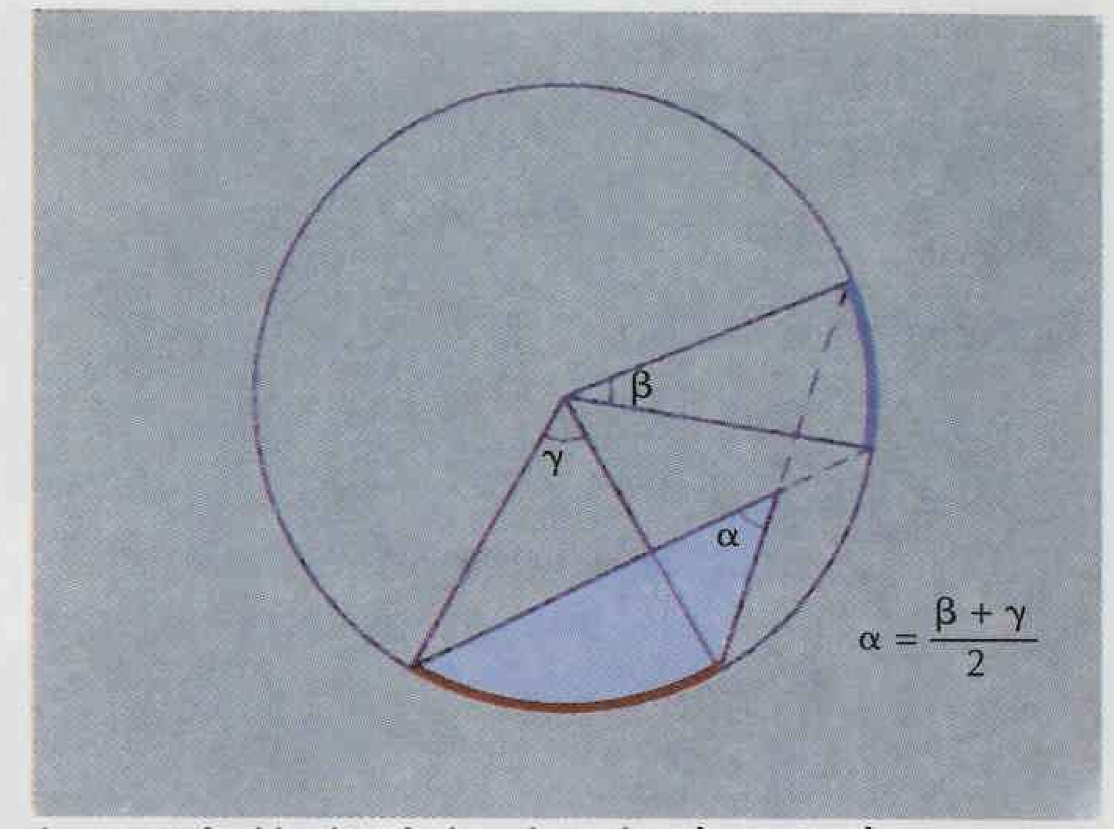


Fig. 7 – Relación ángulo interior - ángulos centrales.

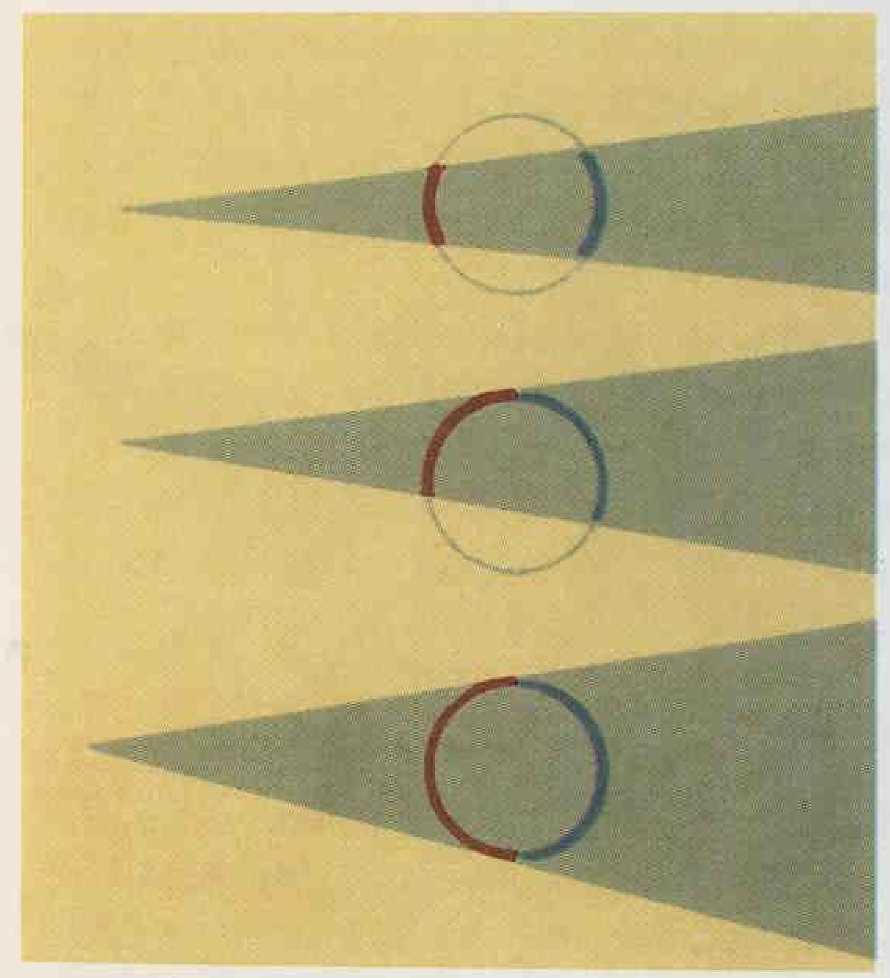


Fig. 8 – Ángulo exterior.

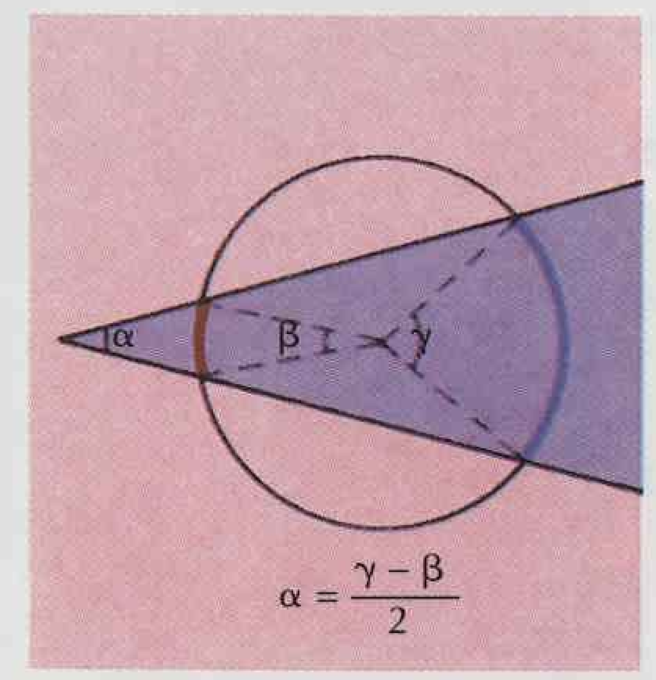


Fig. 9 – Relación ángulo exterior - ángulos centrales.

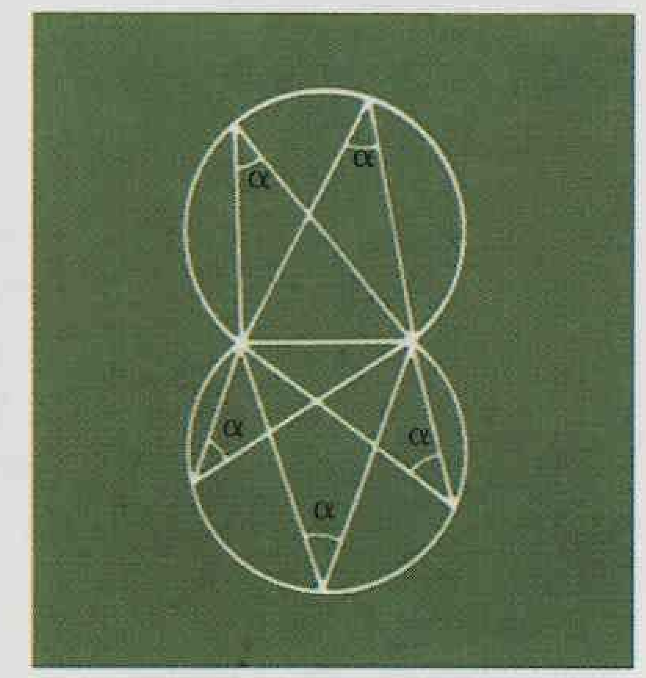


Fig. 10 – Arco capaz.

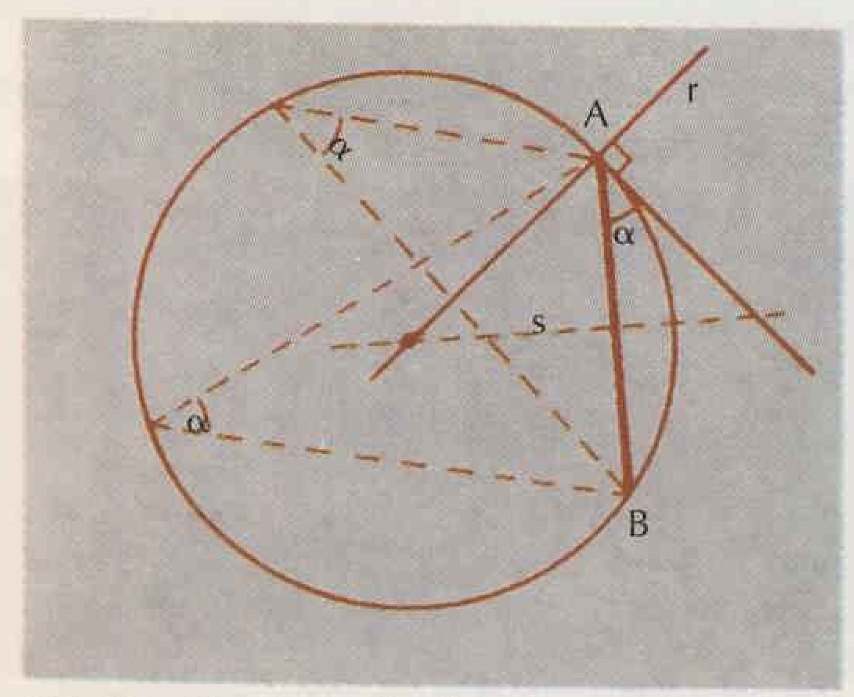


Fig. 11 – Construcción del arco capaz.

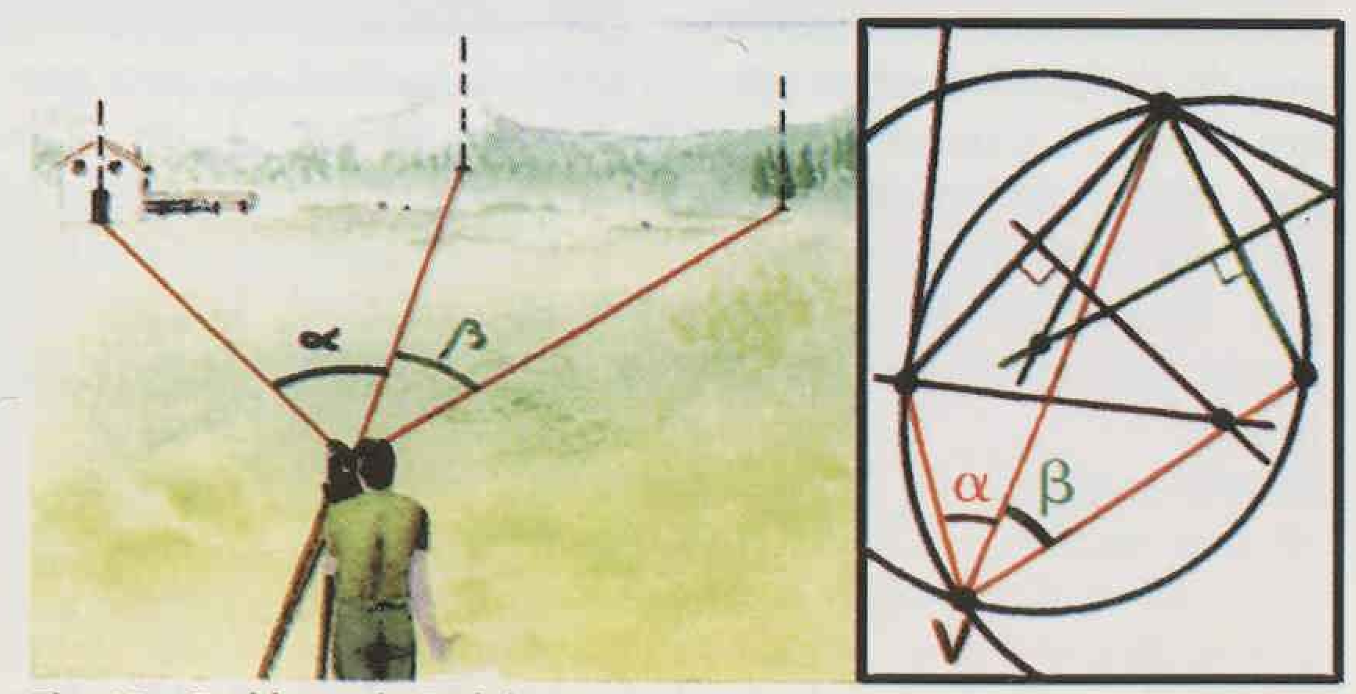


Fig. 12 – Problema de Pothénot.

DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO

Sea f una aplicación biyectiva (A/2) del plano en sí mismo. Si un conjunto de puntos constituye una figura, sus imágenes forman la figura transformada.

Si $\forall$ a y b del plano, la distancia entre $f(a)$ y $f(b)$ es la misma entre a y b, decimos que f es un *desplazamiento* (o *isometría*). Con la composición o producto de desplazamientos, hechos uno tras otro, los desplazamientos constituyen un grupo no conmutativo (A/3), cuyo elemento neutro es la identidad $I(I(p) = p \; \forall p)$.

Los desplazamientos transforman cualquier figura en una de la misma forma y tamaño; triángulo en triángulo, círculo en círculo, etc., con las mismas dimensiones. Observemos, sin embargo, los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la fig. 1. Tienen la misma forma y tamaño ($AB = A'B$), $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $< A = < A'$, $< B = < B'$, $< C = < C'$), si los recortáramos, podríamos superponerlos; sin embargo, el recorrido $A \to$ $\to B \to C$ es positivo (contrario al de las agujas del reloj), mientras que el correspondiente $A' \to B' \to C'$ es negativo. Lo mismo sucede si consideramos (fig. 2) el ángulo de la semirrecta r a la s y el ángulo de r' a s': tienen igual dimensión, pero *distinto sentido*. Los desplazamientos pueden ser *directos* o *inversos*, según conserven o inviertan el sentido de los ángulos.

Clasificación de desplazamientos

Traslaciones. Sea $\overrightarrow{AA'}$ un vector del plano, es decir, el segmento AA' orientado desde A hacia A'. La transformación que a cada punto B le asocia un punto B' tal que el vector $\overrightarrow{BB'}$ tenga la misma longitud, dirección y sentido que $\overrightarrow{AA'}$ se llama *traslación* (figs. 3 y 4). Es un desplazamiento directo que no deja ningún punto fijo (salvo que la traslación sea la identidad).

Giros. Se llama *giro* o *rotación de centro O y ángulo* α a la transformación que asocia a cada punto A uno A' de modo que $OA = OA'$ y el ángulo de la semirrecta OA a la semirrecta OA' sea α (fig 5). Cuando la amplitud o ángulo del giro mide 180° recibe también el nombre de *simetría central* respecto de O (fig. 6). Los giros son desplazamientos directos con un solo punto fijo, el centro (salvo si es el giro identidad).

Simetrías axiales. Se llama *simetría axial respecto de una recta r* a la transformación que asocia a cada punto A un punto A' de modo que $A' = A$, si A es de r, y si A no es de r, A' está sobre la perpendicular por A a r, al otro lado que A y a la misma distancia de r (fig. 7). La recta r se llama eje de la simetría, siendo sus puntos los fijos por la transformación. Son desplazamientos inversos.

Simetrías con deslizamiento. Se obtienen al componer una simetría axial con una traslación en la dirección del eje de simetría (fig. 8). Son desplazamientos inversos sin ningún punto fijo.

Teorema. Todo desplazamiento directo es o una traslación (si no hay puntos fijos), o un giro (si hay exactamente un punto fijo) o la identidad. Todo desplazamiento inverso es o una simetría axial (si hay puntos fijos), o una simetría con deslizamiento (si no los hay).

Producto de desplazamientos

He aquí los más importantes resultados:

— El producto de dos traslaciones es una traslación.

El producto de dos giros de amplitudes α_1 y α_2 y mismo centro O es un giro de amplitud $\alpha_1 + \alpha_2$ y centro O. El producto de dos giros de centros distintos O_1, O_2 y amplitudes α_1 y α_2 es una traslación cuando $\alpha_1 = -\alpha_2$ y, de no ser así, un giro de centro cierto punto O_3 (véase B/10-1) y amplitud $\alpha_1 + \alpha_2$.

— El producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector doble que va perpendicularmente de un eje a otro. Si los ejes son secantes, el producto es un giro centrado en el punto de corte y amplitud el doble del ángulo entre los ejes.

— Todo desplazamiento se puede descomponer como producto de simetrías axiales, en número par si es directo e impar si es inverso.

— Si se asigna el signo + a los desplazamientos directos y el – a los inversos, el producto o composición sigue la regla de los signos.

SEMEJANZAS

Homotecias. Sea O un punto del plano y $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $\alpha > 0$ se llama *homotecia de centro O y razón* α a la biyección del plano que lleva O a O y cada A distinto de O a un punto A' sobre la semirrecta de O hacia A de modo que las distancias cumplan $OA' = \alpha \cdot OA$. Si $\alpha < 0$ se procede igual salvo que se toma A' al otro lado de O que A, siendo $OA' = -\alpha \cdot OA$ (fig. 9), Véase también los ejercicios.

Semejanzas. La composición de una homotecia con un desplazamiento recibe el nombre de *semejanza* y es directa o inversa según lo sea el desplazamiento. La distancia entre las imágenes de dos puntos es el producto de la distancia original por una constante fija llamada *razón de semejanza* que es, de hecho, la razón de la homotecia implicada (fig. 10).

Una figura y su transformada por una semejanza que no sea desplazamiento tienen igual forma (cuadrados en cuadrados, círculos en círculos, etc.) pero *no* el mismo tamaño.

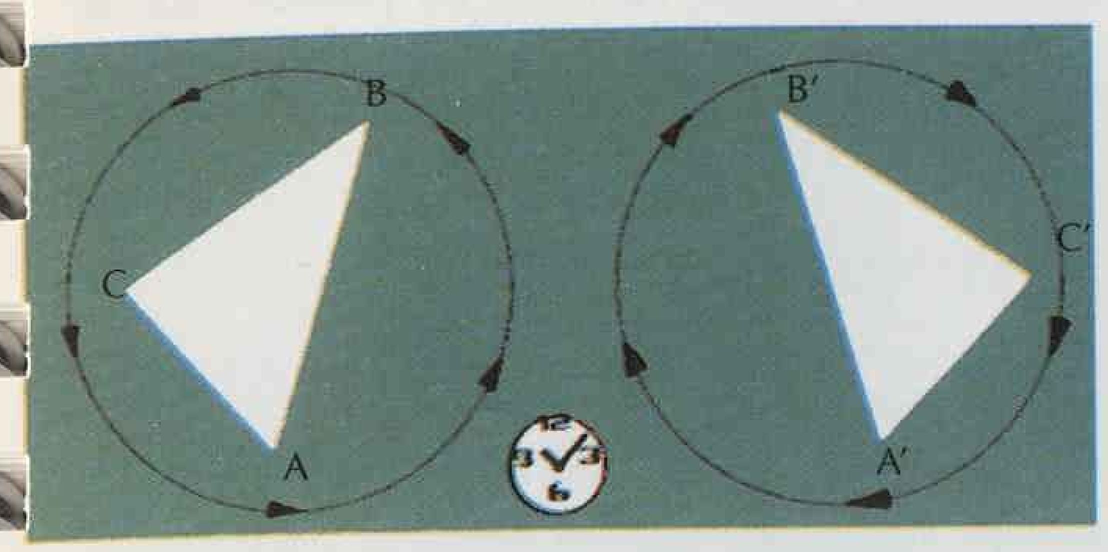


Fig. 1 – Triángulos inversamente congruentes.

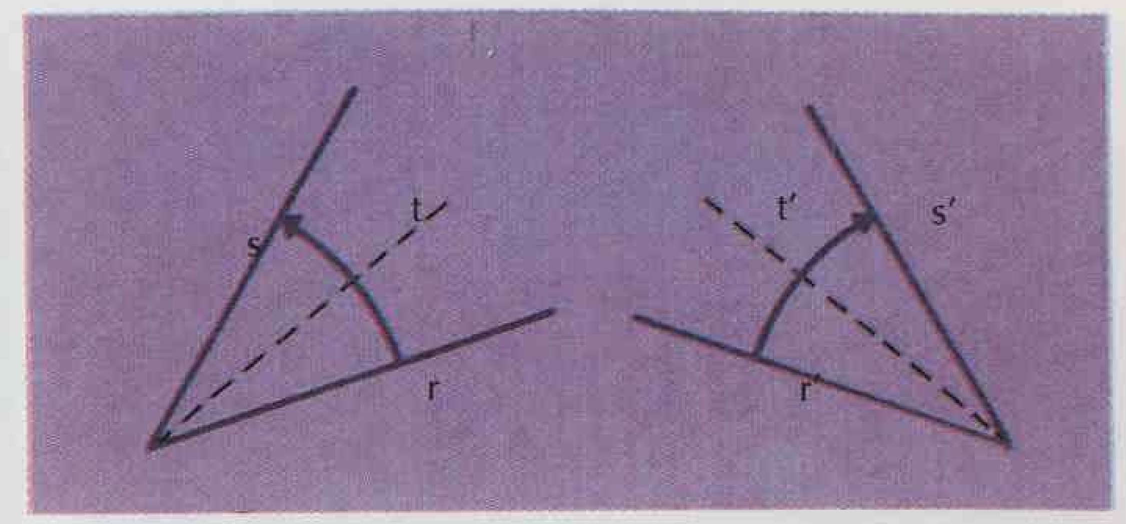


Fig. 2 – Ángulos de igual magnitud y distinto sentido.

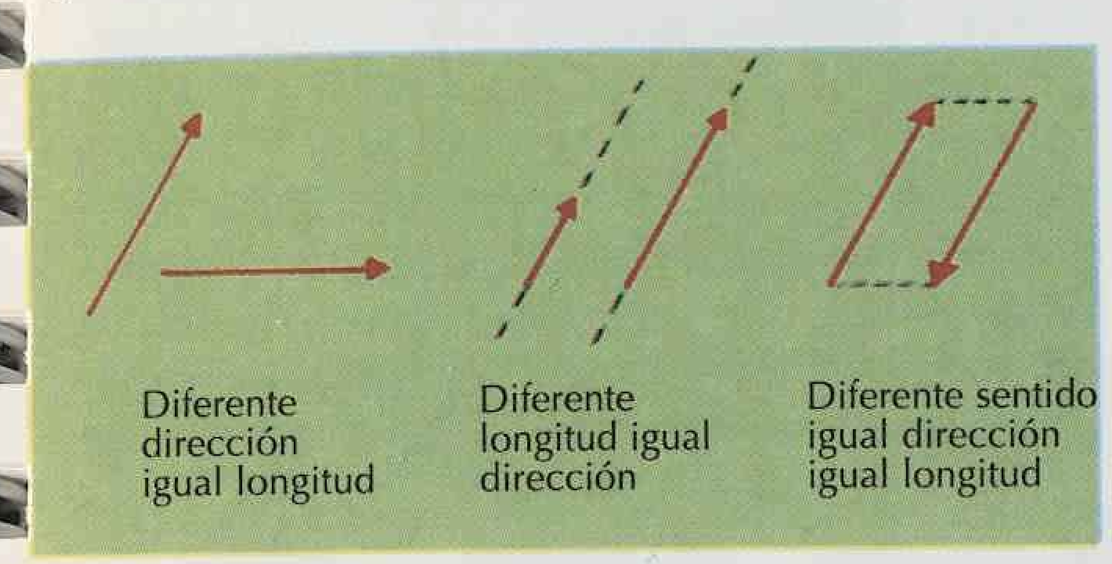


Fig. 3 – Vectores.

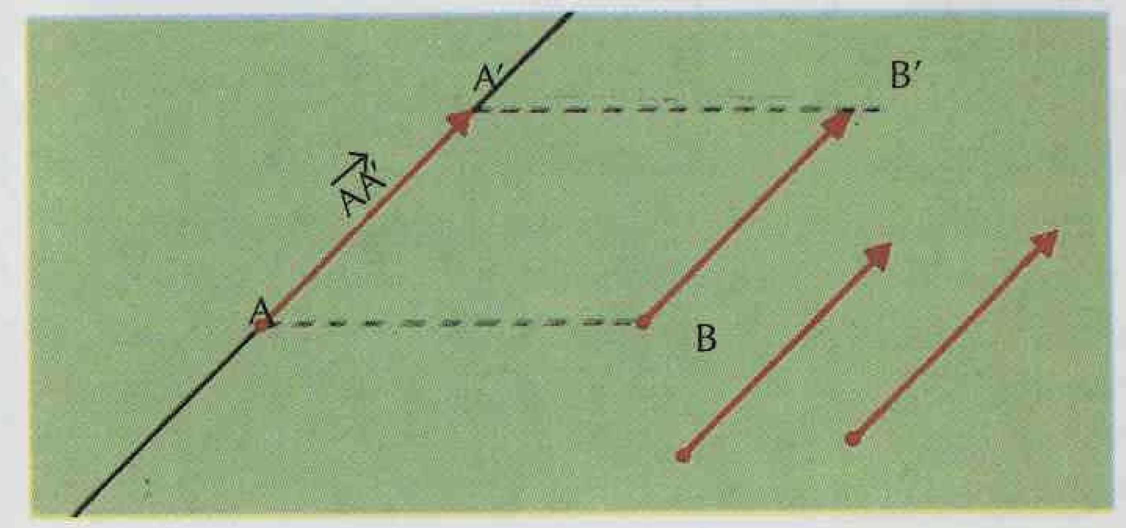


Fig. 4 – Traslación.

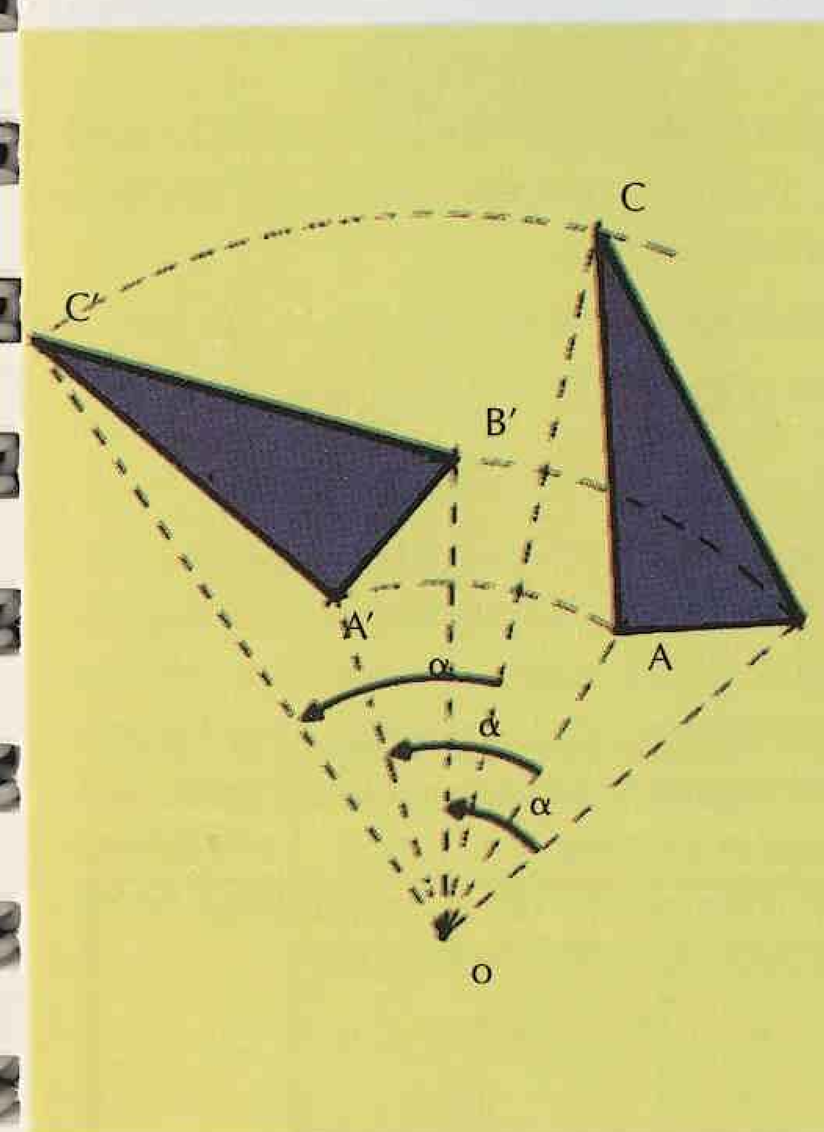


Fig. 5 – Giro de ángulo α.

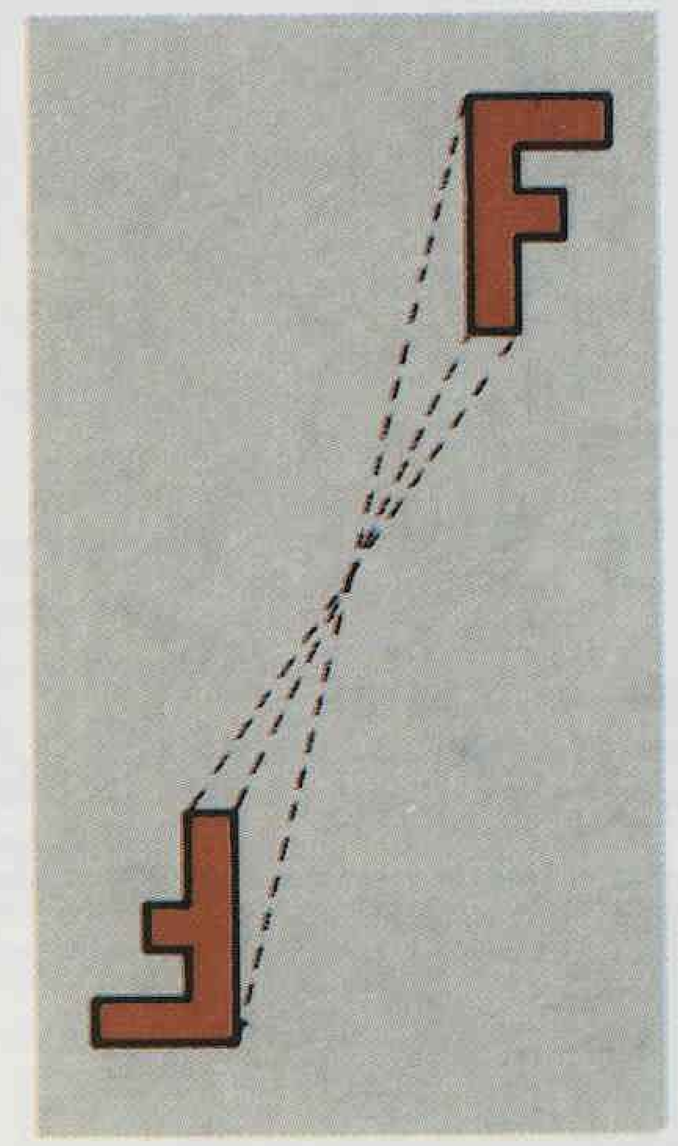


Fig. 6 – Simetría central.

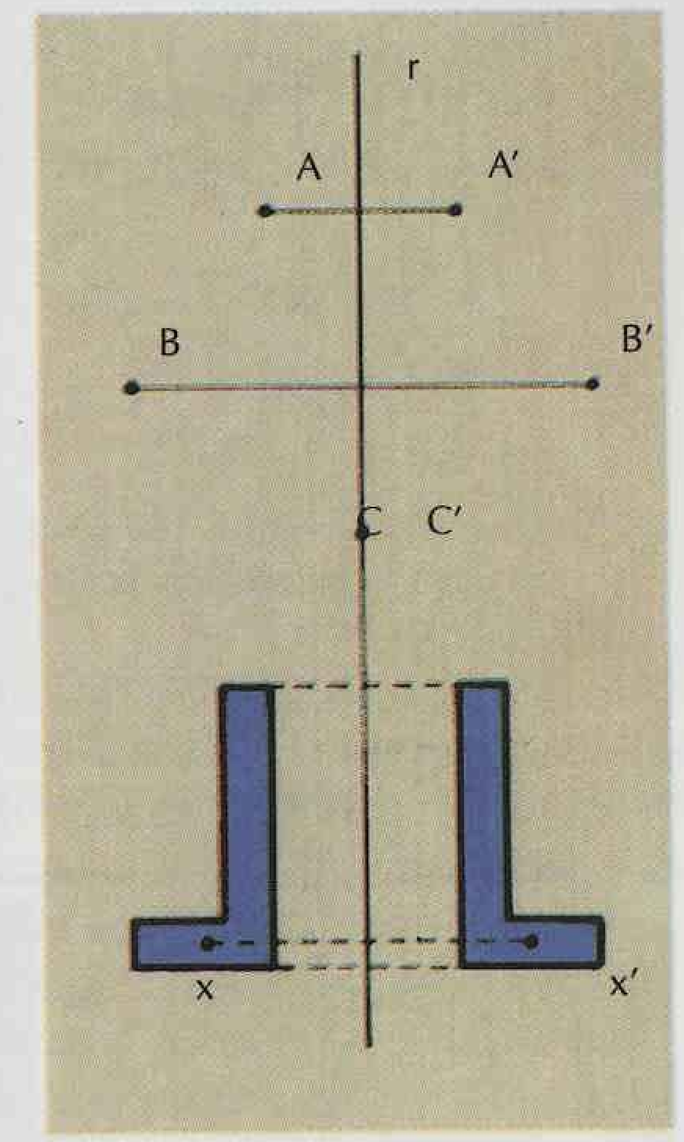


fig. 7 – Simetría axial.

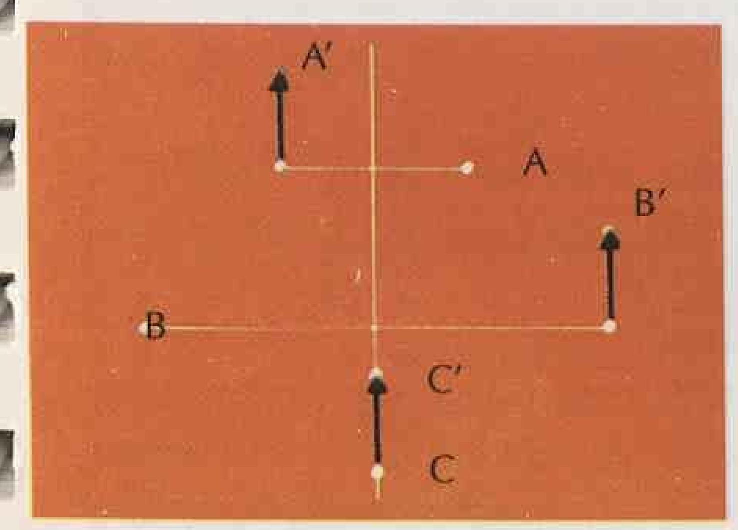


Fig. 8 – Simetría seguida de traslación.

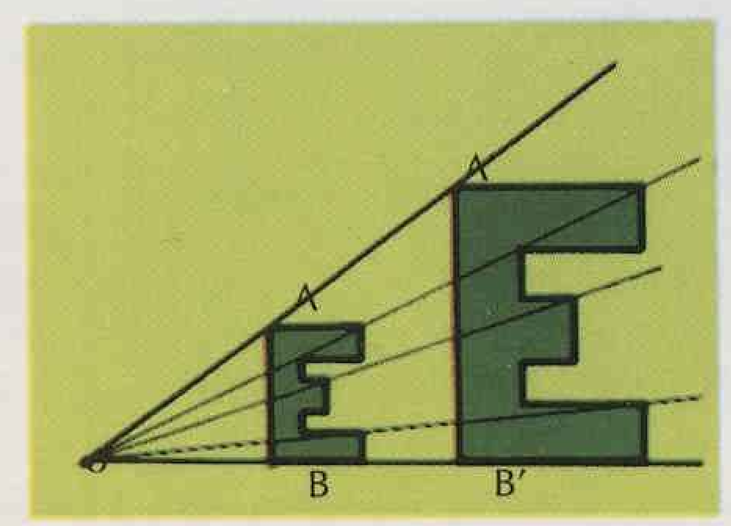


Fig. 9 – Transformación de una figura mediante homotecia de centro 0 y razón 2.

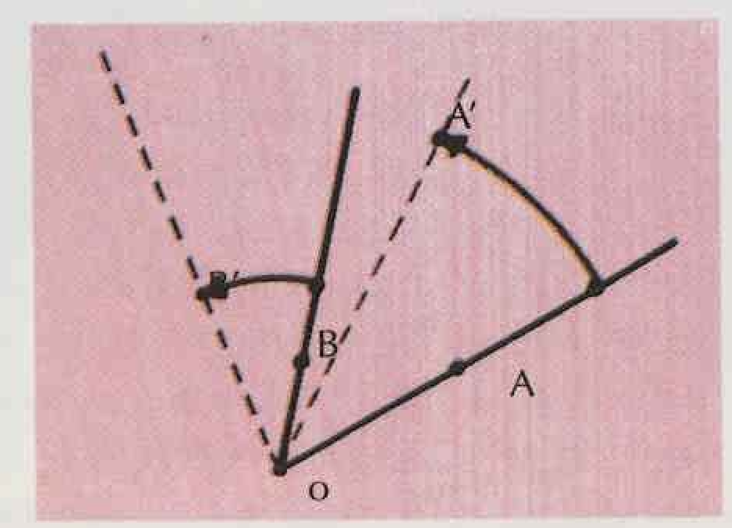


Fig. 10 – Semejanza obtenida por giro tras homotecia del mismo centro.

CONGRUENCIA EN EL PLANO

Dos figuras se dice que son *congruentes* cuando existe un desplazamiento (véase B/10) que transforma una en otra. Ello significa que tendrán la misma forma y el mismo tamaño. Puede pensarse que se trata de «la misma figura», pero *en distinta posición*. Cuando el desplazamiento es directo, cabe imaginar a la figura original moviéndose «por dentro» del plano hasta superponerse con su imagen (fig. 1). No es tan sencillo cuando la congruencia es inversa, pues en tal caso interviene una simetría axial; puede visualizarse entonces mediante un pliegue del plano sobre el eje de simetría y un posterior desplazamiento ya interno (fig. 2).

Cuando se trata de figuras sencillas no es necesario en general exhibir el desplazamiento, pues basta ver que son iguales ciertos elementos estructurales. Por ejemplo, dos segmentos son congruentes cuando miden lo mismo y otro tanto ocurre si se trata de dos ángulos. Dos circunferencias son congruentes cuando tienen el mismo radio. De especial interés es el caso de los triángulos: dos de ellos son congruentes cuando sus vértices pueden designarse A, B, C y A', B', C', de manera que sus lados tengan la misma medida

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C'$$

y sus ángulos también

$$< A = < A',\ < B = < B',\ < C = < C'.$$

Sin embargo, hay condiciones que aseguran ya la congruencia de los triángulos. Veamos las más importantes:

— Que tengan iguales dos ángulos y un lado cualquiera.
— Que tengan iguales dos lados y el ángulo comprendido.
— Que tengan iguales los tres lados

Debe observarse que la igualdad de tres ángulos no asegura la congruencia, como tampoco la asegura el tener iguales dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (fig. 3).

Congruencia de una figura consigo misma

Evidentemente, toda figura es congruente consigo misma, pues la identidad es, cuando menos, un desplazamiento que la deja fija. Ciertas figuras admiten otras posibilidades, por ejemplo, un cuadrado es fijo por la rotación de 90° en torno a su centro. El caso de mayor interés es el de las figuras simétricas. Una figura se dice que es *simétrica con respecto a un punto o centro,* cuando existe una simetría central que la deja fija (fig. 4). Una figura es *simétrica con respecto a una recta* cuando hay una simetría axial que deja fija la figura. La recta de puntos fijos se llama *eje de simetría* de la figura (fig. 4). En la Naturaleza y en las Artes Decorativas abundan los ejemplos de figuras simétricas.

SEMEJANZA EN EL PLANO. ESCALAS

Dos figuras se dice que son *semejantes* cuando existe una semejanza (véase B/10) que transforma una en otra. Ello significa que tendrán la misma forma (y distinto tamaño, salvo en el caso especial de que sean congruentes). Puede pensarse también que son «la misma figura», pero dibujada *a distinta escala* y, posiblemente, en distinta posición. En general, cuando se hace un mapa o plano, el dibujo es una figura semejante a la realidad de lo que se representa; todas las longitudes dibujadas están proporcionadas a las reales; tal proporción es la razón de semejanza, y en este caso se llama *escala* del mapa o plano. Si es $\frac{1}{200}$, por ejemplo, lo que se suele indicar 1 : 200, significa que cada unidad del dibujo corresponde a 200 unidades reales.

• **Ejemplo.** Una hoja del mapa 1 : 50.000 mide 40 × 60 cm. ¿Cuáles son los lados del rectángulo real representado?

(40 cm) · 50.000 = 2.000.000 cm = 20 km,
(60 cm) · 50.000 = 2.000.000 cm = 30 km,

Cuando se trata de figuras sencillas no es necesario, en general, exhibir la semejanza que transforma una en otra, pues basta comprobar ciertos aspectos estructurales. Por ejemplo, dos figuras poligonales semejantes tienen iguales todos sus ángulos y proporcionales sus lados. En el caso especialmente interesante de la semejanza entre dos triángulos ABC y $A'B'C'$ ha de ser

$$< A = < A',\ < B = < B',\ < C = < C',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C''}$$

Sin embargo, hay condiciones más simples que garantizan tal semejanza. He aquí las más importantes:

— Que tengan proporcionales los tres lados.
— Que tengan proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido.
— Que tengan dos ángulos iguales.

Si entre dos figuras hay una siemejanza de razón k, la razón de sus áreas es k^2. Por ejemplo, son semejantes un cuadrado de lado 3 y otro de lado 6, siendo 2 la razón de semejanza; por ello, el área del segundo será 2^2 veces la des primero, es decir, el cuádruplo.

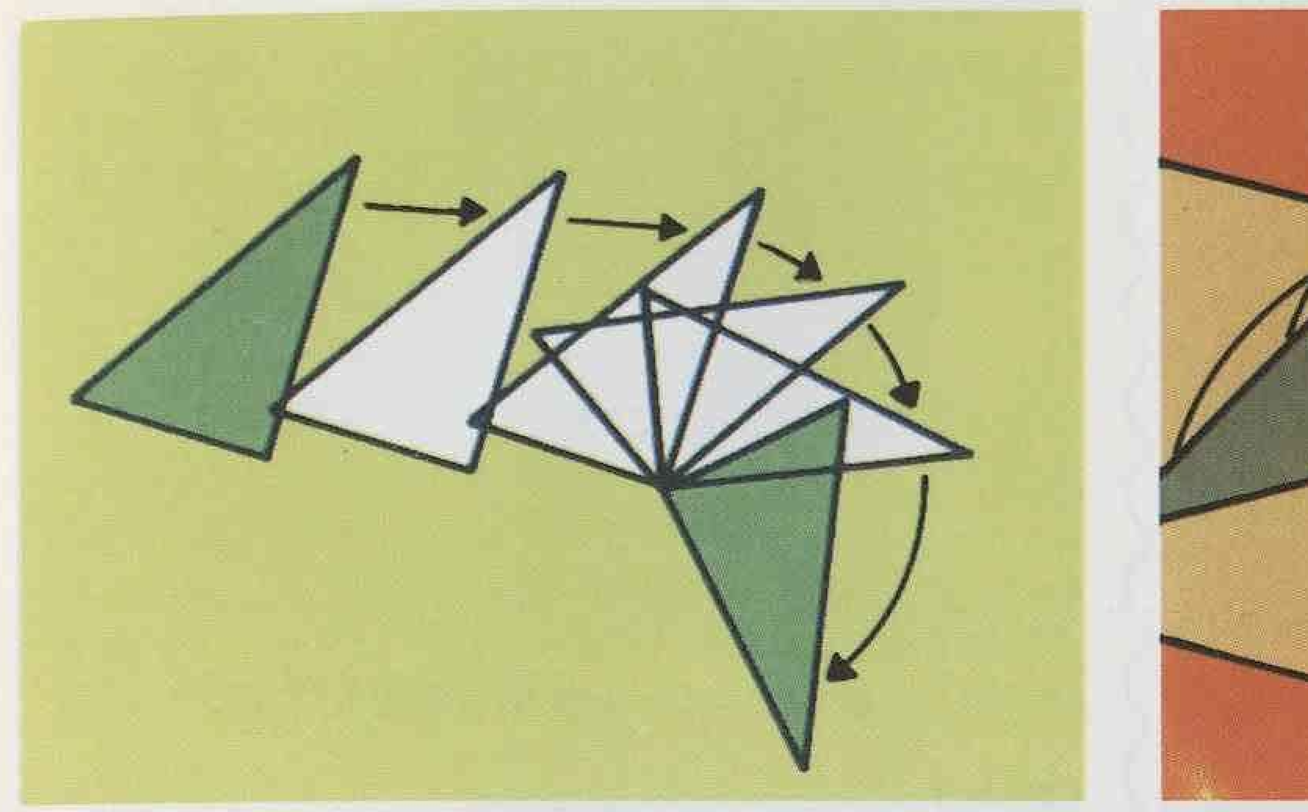


Fig. 1 – Desplazamiento directo.

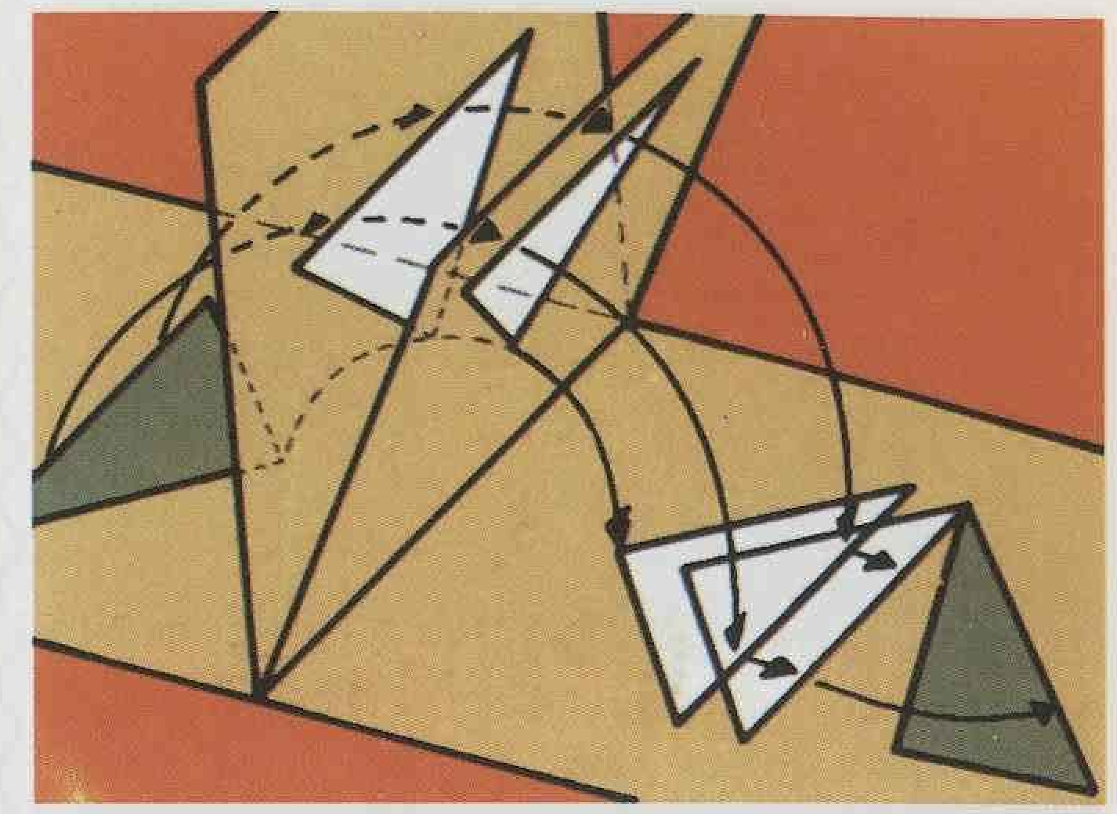


Fig. 2 – Desplazamiento inverso.

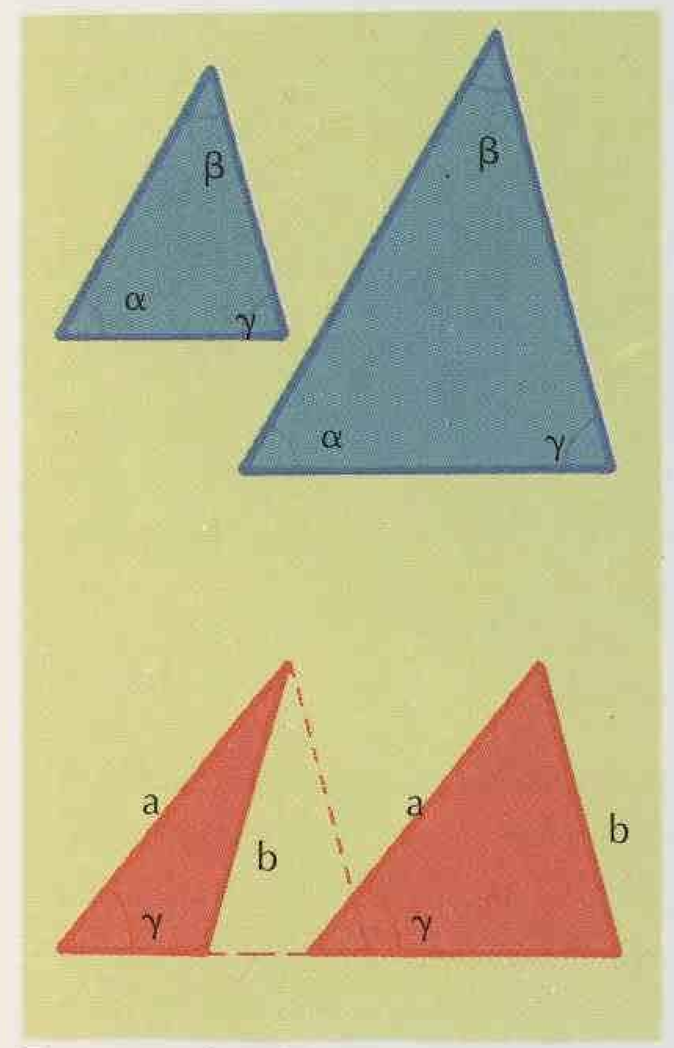


Fig. 3 – La igualdad de ciertos elementos no asegura la congruencia de los triángulos.

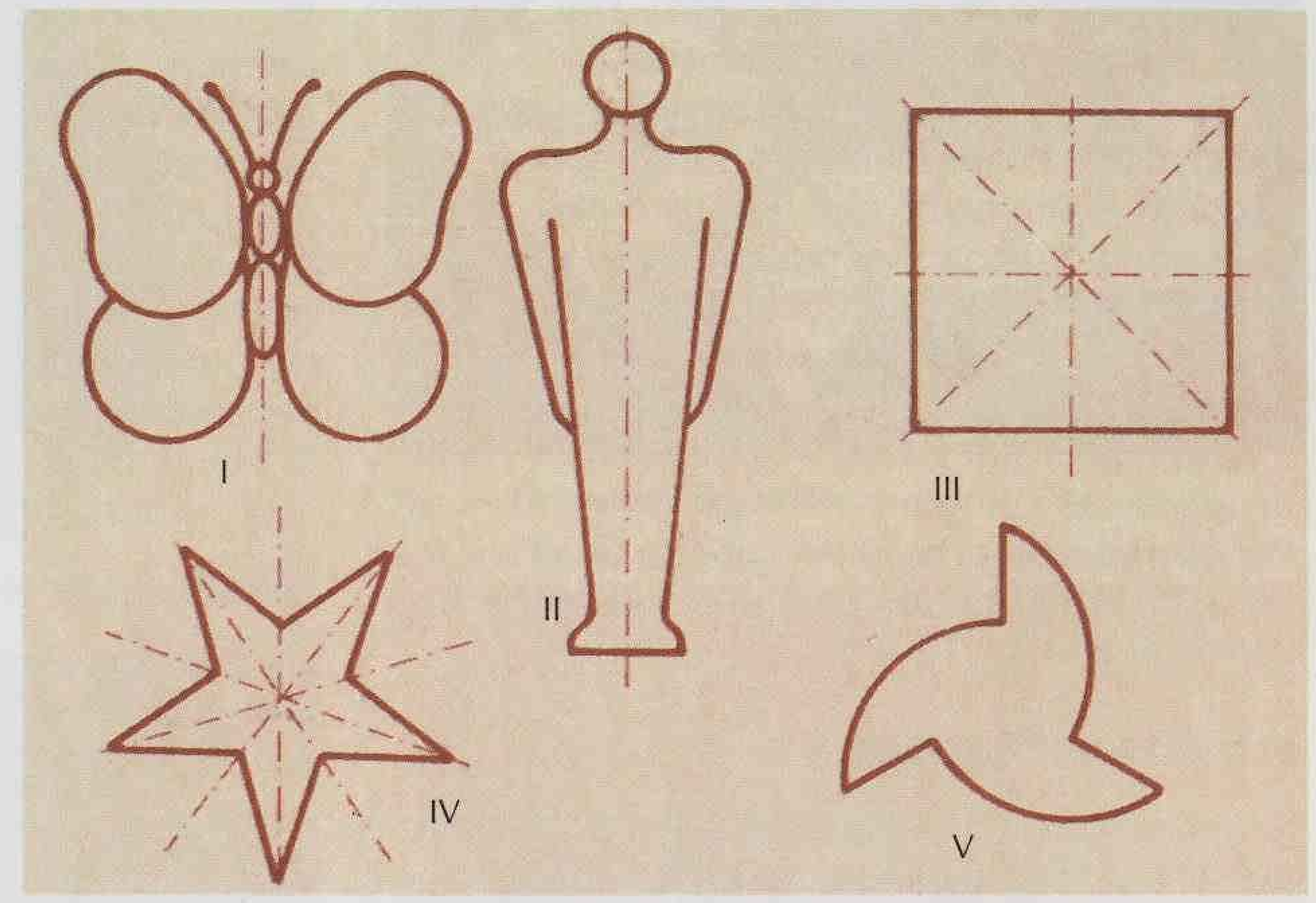


Fig. 4 – Trazados en línea discontinua los ejes de simetría. V sólo tiene giros que la autotransforman. IV tiene además ejes de simetría, aunque no centro de simetría, y III tiene de todo ello.

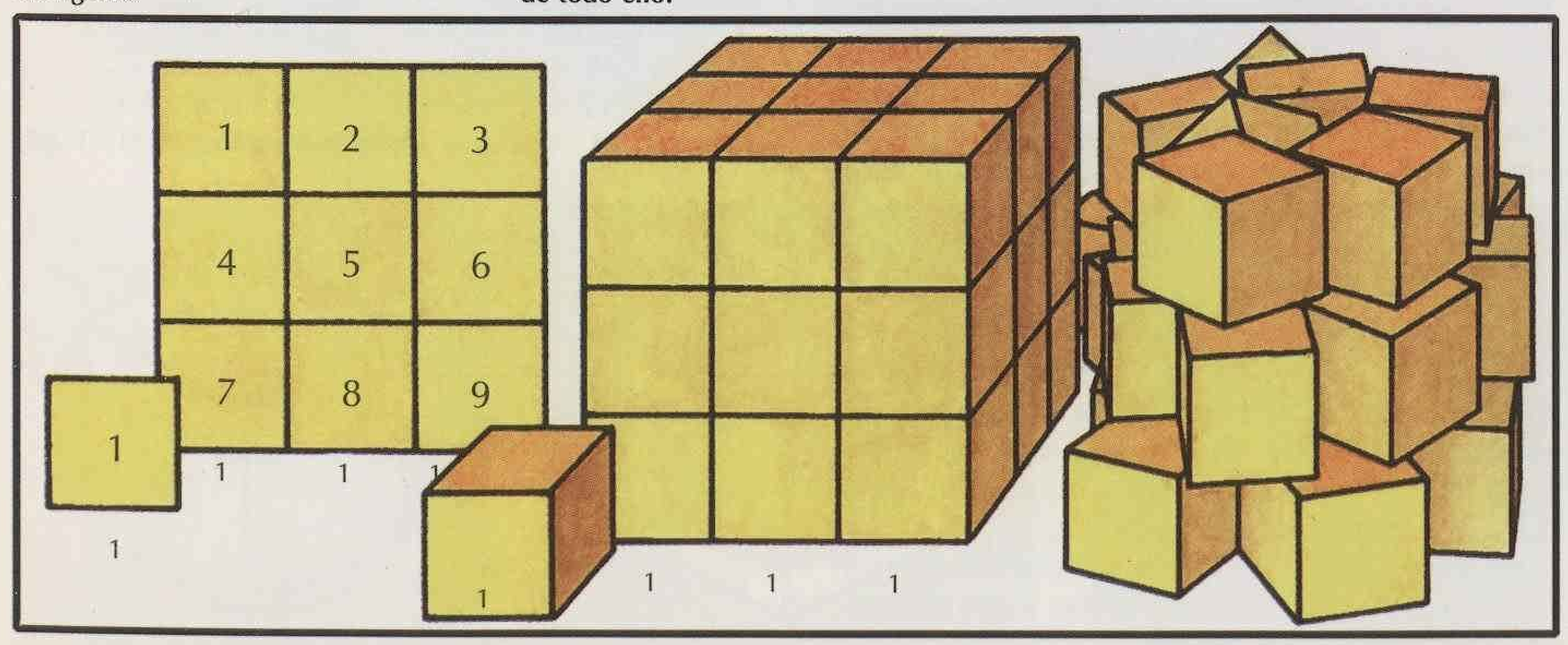


Fig. 5 – Al triplicar el lado de un cuadrado se obtiene otro de área 3^2 = 9 veces mayor. Al triplicar el lado de un cubo se obtiene otro de volumen 3^3 = 27 veces mayor.

POLIEDROS

Elementos

Se denomina *poliedro* a todo cuerpo limitado por polígonos planos —a los que se llama *caras* del poliedro—, de manera que cada lado de una cara pertenezca a otra y sólo a otra y que dos caras con lado común no estén en un mismo plano. Los lados y vértices de las caras se llaman, respectivamente, *aristas* y *vértices* del poliedro. Quizás el poliedro más conocido sea el cubo (fig. 2), idealización de un dado, cuyas caras son cuadrados.

Los poliedros se designan con el nombre griego del número de sus caras, seguido de la terminación *-edro*. Así, tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro, dodecaedro, icosaedro indican que el número de caras es cuatro, cinco, seis, siete, doce y veinte, respectivamente.

Se dice que un poliedro es *convexo* cuando al tomar dos de sus puntos (de la frontera o del interior), el segmento que les une queda siempre por completo en el poliedro; ello equivale a que el plano de cada cara deje al resto del poliedro a uno sólo de sus lados.

Teorema de Euler. En todo poliedro convexo, si c es el número de caras, v el de vértices y a el de aristas, se cumple $c + v - a = 2$.

Por ejemplo, en el caso del cubo se tiene $c = 6$, $v = 8$, $a = 12$, siendo como en todo poliedro convexo, $6 + 8 - 12 = 2$.

POLIEDROS REGULARES

Si un poliedro convexo tiene como caras polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de aristas, se dice que es un *poliedro regular*. Solamente existen cinco tipos de poliedros regulares, que se detallarán a continuación. Tal resultado es consecuencia de combinar el Teorema de Euler con las posibles sumas de los ángulos de caras concurrentes en un vértice. Aunque para referirse a uno de estos poliedros debería añadirse el adjetivo *regular*, es corriente omitirlo, salvo cuando ello pueda originar confusión.

Tetraedro (fig. 1). Tiene cuatro caras, que son triángulos equiláteros, seis aristas y cuatro vértices, en los que concurren tres aristas.

Hexaedro o cubo (fig. 2). Sus seis caras son cuadrados; tiene doce aristas y ocho vértices. Llegan tres aristas a cada vértice.

Octaedro (fig. 3). Constan de ocho caras que son triángulos equiláteros, doce aristas y seis vértices, concurriendo cuatro aristas en cada uno.

Dodecaedro (fig. 4). Tiene doce caras que son pentágonos regulares, treinta aristas y veinte vértices, cada uno de los cuales es extremo de tres aristas.

Icosaedro (fig. 5). Está formado por veinte triángulos equiláteros como caras, treinta aristas y doce vértices, en los que concurren cinco aristas.

Desarrollo

Evidentemente, para construir un poliedro regular podrían recortarse en un papel los polígonos necesarios para ser sus caras, pegándolos luego por las aristas. Sin embargo, es más cómodo agruparlos, recortar el dibujo, llamado *desarrollo*, y hacer dobleces en el espacio, juntando las aristas que deben pegarse (figs. 1 a 5).

Centro

Se llama *centro* de un poliedro regular al punto del espacio que está a la misma distancia de todos los vértices y que será centro de la *esfera circunscrita* (fig. 6). Los segmentos que unen el centro del poliedro con los centros de las caras son perpendiculares a las mismas y de igual longitud, por lo que también es centro de la *esfera inscrita* (fig. 7); los segmentos que le unen con los puntos medios de las aristas son perpendiculares a ellas y de igual longitud, por lo que también es centro de la *esfera tangente a las aristas* (fig. 8).

Fórmulas para el cálculo

Las expresiones siguientes relacionan la arista a del poliedro, su área S (que es la suma de las de sus caras), su volumen V, el radio r de la esfera inscrita, el de la circunscrita, denotado R y el de la esfera tangente a la aristas, denotado ρ.

Tetraedro	**Cubo**	**Octaedro**
$S = a^2\sqrt{3}$	$S = 6\,a^2$	$S = 2\,a^2\sqrt{3}$
$V = a^3\sqrt{2}/12$	$V = a^3$	$V = a^3\sqrt{2}/3$
$R = a\sqrt{6}/4$	$R = a\sqrt{3}/2$	$R = a\sqrt{2}/2$
$r = a\sqrt{6}/12$	$r = a/2$	$r = a\sqrt{6}/6$
$\rho = a\sqrt{2}/4.$	$\rho = a\sqrt{2}/2.$	$\rho = a/2.$

Dodecaedro

$$S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ ,\quad V = a^3(15 + 7\sqrt{5})/4,$$

$$R = a(\sqrt{3} + \sqrt{15})/4\ ,\quad \rho = a(3 + \sqrt{5})/4,$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}.$$

Icosaedro

$$S = a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4\ ,\quad V = 5a^3(3 + \sqrt{5})/6,$$

$$R = a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4\ ,\quad \rho = a\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}/4,$$

$$r = a(3\sqrt{3} + \sqrt{15})/12.$$

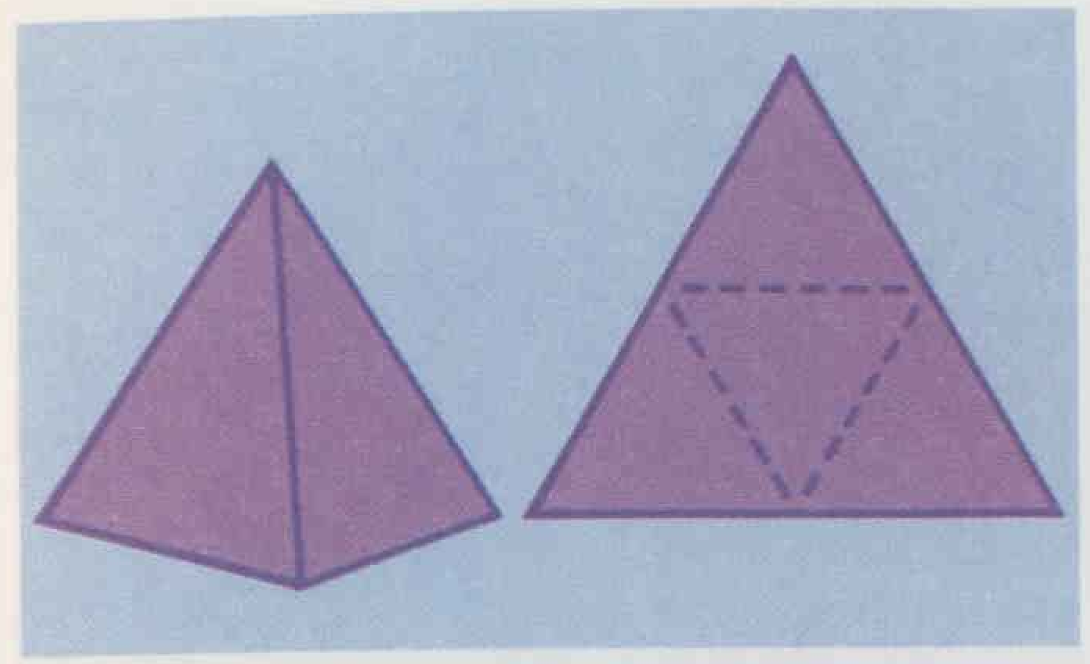


Fig. 1 – Tetraedro y desarrollo.

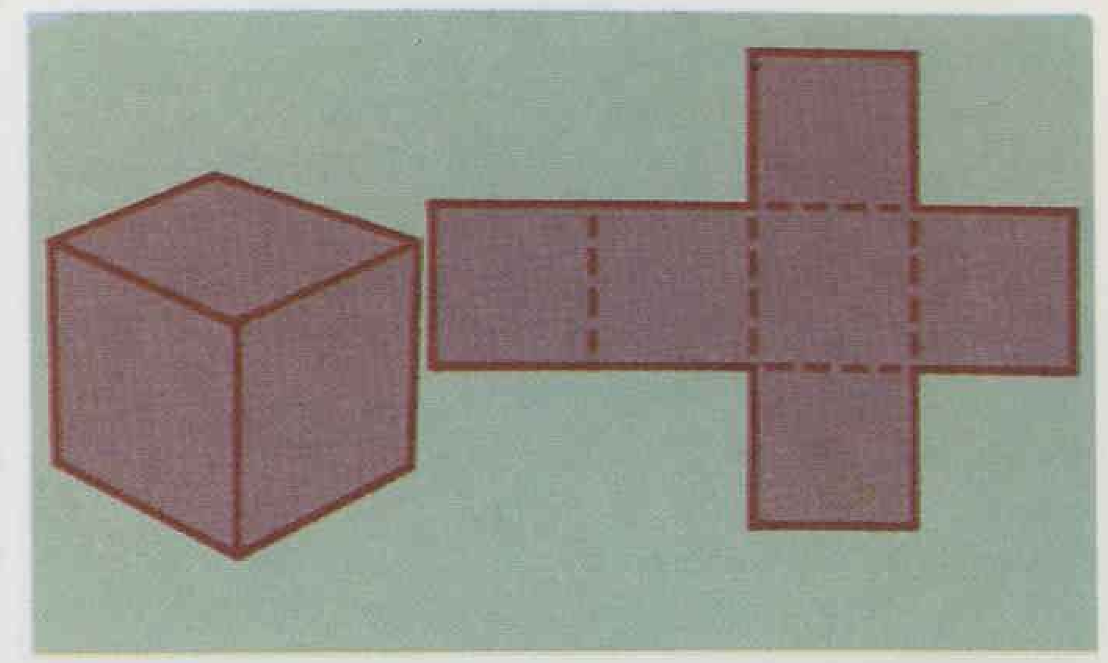


Fig. 2 – Cubo y desarrollo.

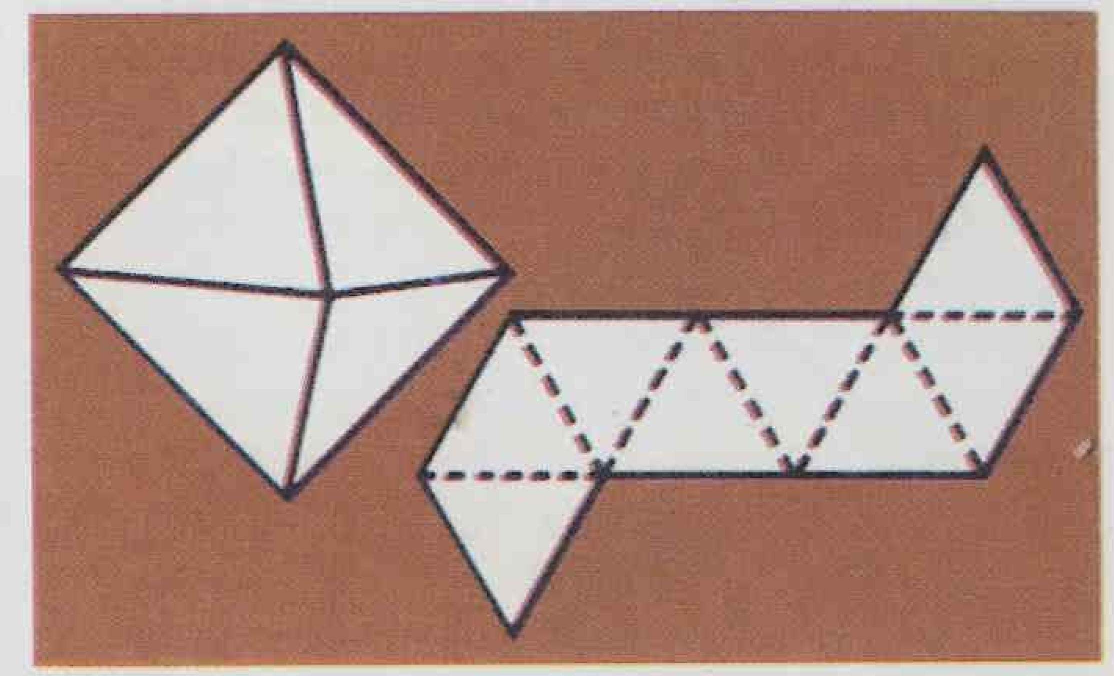


Fig. 3 – Octaedro y desarrollo.

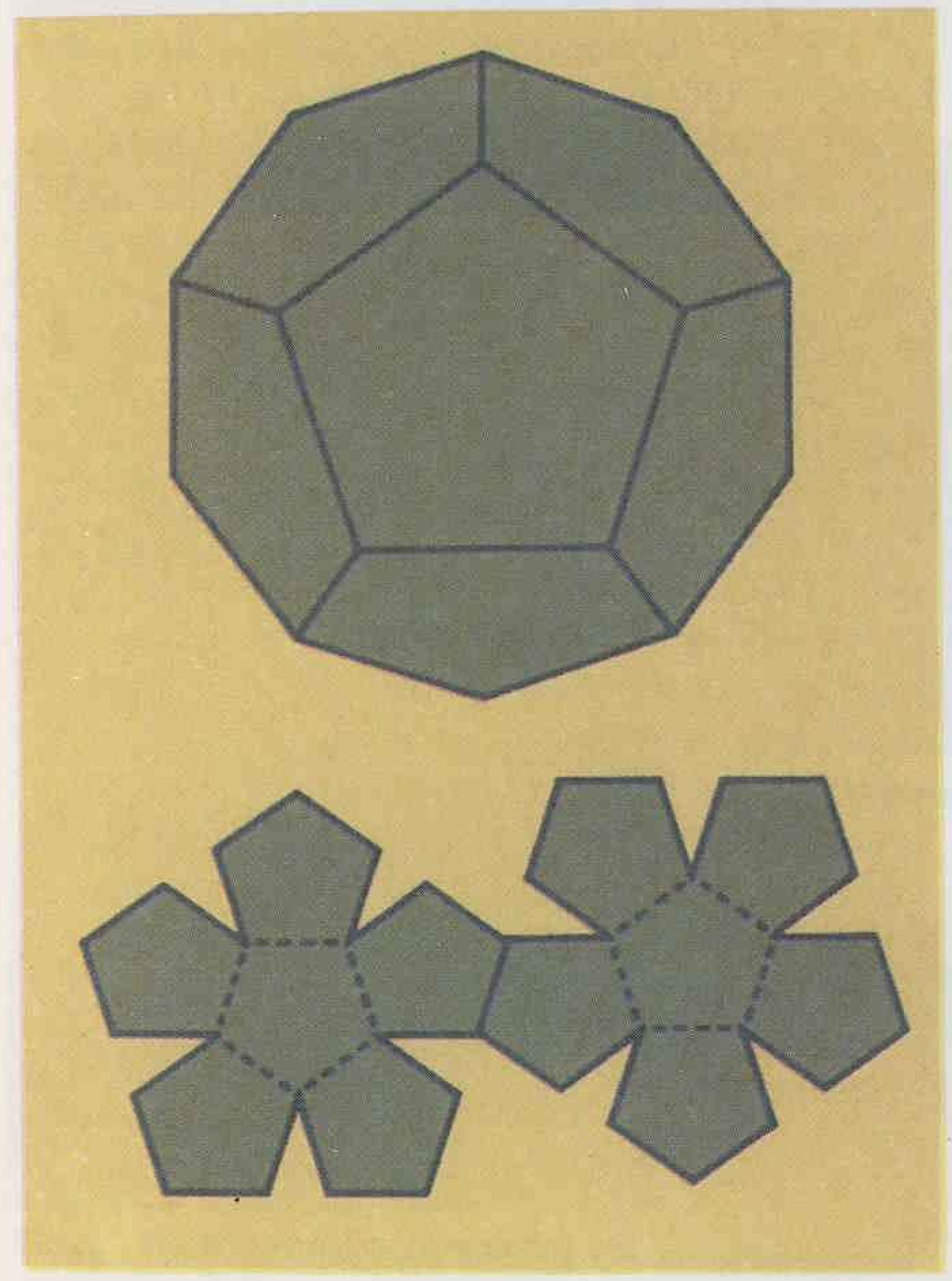


Fig. 4 – Dodecaedro y desarrollo.

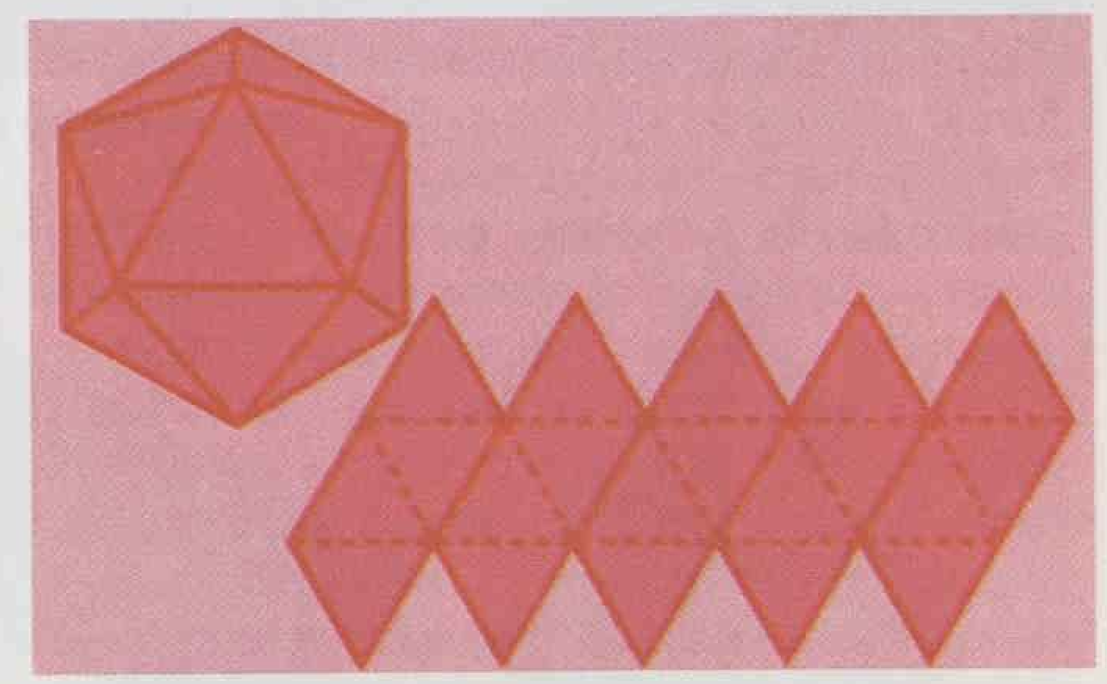


Fig. 5 – Icosaedro y desarrollo.

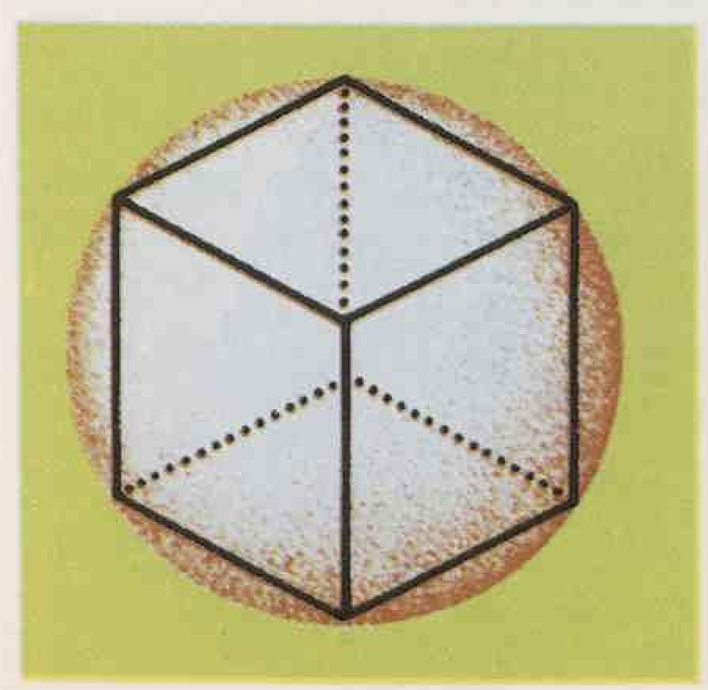


Fig. 6 – Esfera circunscrita.

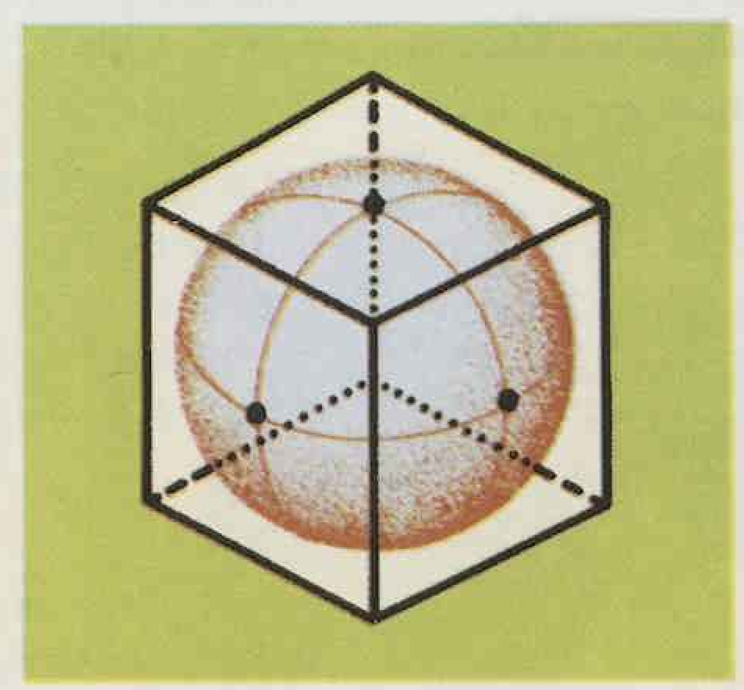


Fig. 7 – Esfera inscrita.

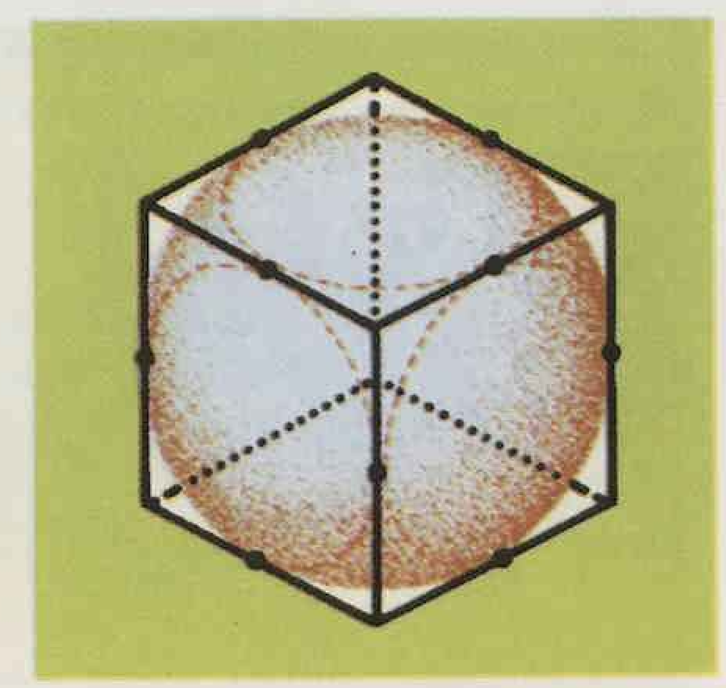


Fig. 8 – Esfera tangente a las aristas.

PRISMAS

Elementos. Consideremos un polígono situado en un plano *M* y sea *r* una recta no paralela a *M* (fig. 1). Los puntos de las rectas paralelas a *r* que corten al plano en un punto del polígono dado constituyen una *superficie prismática* (fig. 1a). Al «tapar» la superficie prismática por el polígono plano *M* y otro paralelo a él, se obtiene un poliedro llamado *prisma* (fig. 1b). Está limitado, pues, por dos polígonos paralelos e idénticos, a los que se llama *bases*, y por *caras laterales* que son paralelogramos. Los prismas se llaman triangulares, cuadrangulares, etc., de acuerdo con el número de lados de su base. Los lados de las bases son las *aristas básicas* y los lados restantes de las caras laterales son las *aristas laterales*. Una *diagonal* de un prisma es un segmento que une dos vértices no situados en la misma cara. La *altura* del prisma es la distancia entre los planos de las bases (fig. 2). El prisma es *recto* cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases; en tal caso, la altura coincide con la longitud de las aristas laterales. Si no es recto se dice que es *oblicuo* (fig. 2a). Un prisma es *regular* cuando es recto y tiene como bases polígonos regulares.

Un prisma cuyas bases sean paralelogramos se llama *paralelepípedo* (fig. 3a). Cualquiera de sus caras podría tomarse como base. Un paralelepípedo cuyas seis caras sean rectángulos se llama *octoedro* (fig. 3b). Tal forma tienen corrientemente las cajas o las habitaciones.

Desarrollo de un prisma recto. Los polígonos cuyas caras limitan el prisma pueden dibujarse agrupados en el plano (dibujo llamado *desarrollo*), de modo que recortando, doblando y pegando puede formarse el prisma (fig. 4).

Áreas lateral y total del prisma recto. El *área lateral* de un prisma recto es la suma de las áreas de las caras laterales. El *área total* es la suma del área lateral con las áreas de las bases. El desarrollo (fig. 4) evidencia que, en un prisma recto

$$\text{área lateral} = \text{perímetro de la base} \times \text{altura}.$$

En el caso de un ortoedro de dimensiones x, y, z, se tendrá

$$\text{área total ortoedro} = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Volumen. El volumen de un prisma cualquiera, sea recto u oblicuo, es igual al producto del área de la base por la altura.

En el caso de un ortoedro de dimensiones x, y, z, se tiene

$$\text{volumen ortoedro} = x \cdot y \cdot z.$$

Esta última fórmula suele referirse coloquialmente mediante la expresión *largo por ancho por alto*.

PIRÁMIDES

Elementos. Se llama *pirámide* al cuerpo limitado por un polígono, llamado *base*, y los triángulos con vértice un punto *V* fuera del plano de la base y un lado común con ella (fig. 5). El punto *V* es el *vértice* de la pirámide; los triángulos son las *caras laterales*, las cuales tienen un lado en la base (*arista básica*) siendo los otros dos *aristas laterales*. La *altura* de la pirámide es la del vértice sobre el plano básico (*h* en fig. 5). Una pirámide se dice que es triangular, cuadrangular, etc., de acuerdo con el polígono que tenga por base.

Una pirámide es *regular* cuando su base es un polígono regular cuyo centro sea, además, pie de la altura (fig. 5). La *apotema* de una pirámide regular es la altura del vértice sobre una cualquiera de las aristas básicas (ap. en fig. 5b). Al seccionar la pirámide por un plano paralelo a la base se obtiene otra pirámide, más pequeña (pirámide *deficiente*) y un *tronco de pirámide*, cuya *base inferior* es la que tenía la pirámide; su *base superior* es un polígono semejante a la otra base y sus *caras laterales* son trapecios. La *altura* del tronco es la distancia entre las bases (*h* en fig. 6). El tronco es *regular* cuando lo era la pirámide, siendo su *apotema* la altura de cualquier trapecio lateral (*ap.* en fig. 6).

Desarrollo de pirámide y tronco regulares. La figura 7 muestra el *desarrollo* de una pirámide regular, o de su tronco, que es el dibujo agrupado de los polígonos básicos y laterales que recortando, pegando y doblando, permiten construir el cuerpo.

Áreas lateral y total. El *área lateral* es la suma de las de las caras laterales. Si el perímetro de la base de una pirámide regular mide p y su apotema es a, el área lateral es

$$A.\ L. = \frac{p \cdot a}{2}.$$

Si tenemos un tronco de apotema a, perímetro de la base superior p_s y perímetro de la base inferior p_i, el área lateral es

$$A.\ L. = \frac{p_s + p_i}{2} \cdot a.$$

El área total es la lateral más la de la base en la pirámide y la lateral más las dos básicas en el tronco.

Volumen. Si una pirámide (regular o no) tiene altura h y área de la base B, su volumen es

$$V = \frac{B \cdot h}{3}.$$

El volumen de un tronco de altura h, base superior de área B_s y la inferior de área B_i es

$$V = \frac{h}{3}\left(B_s + B_i + \sqrt{B_s \cdot B_i}\right).$$

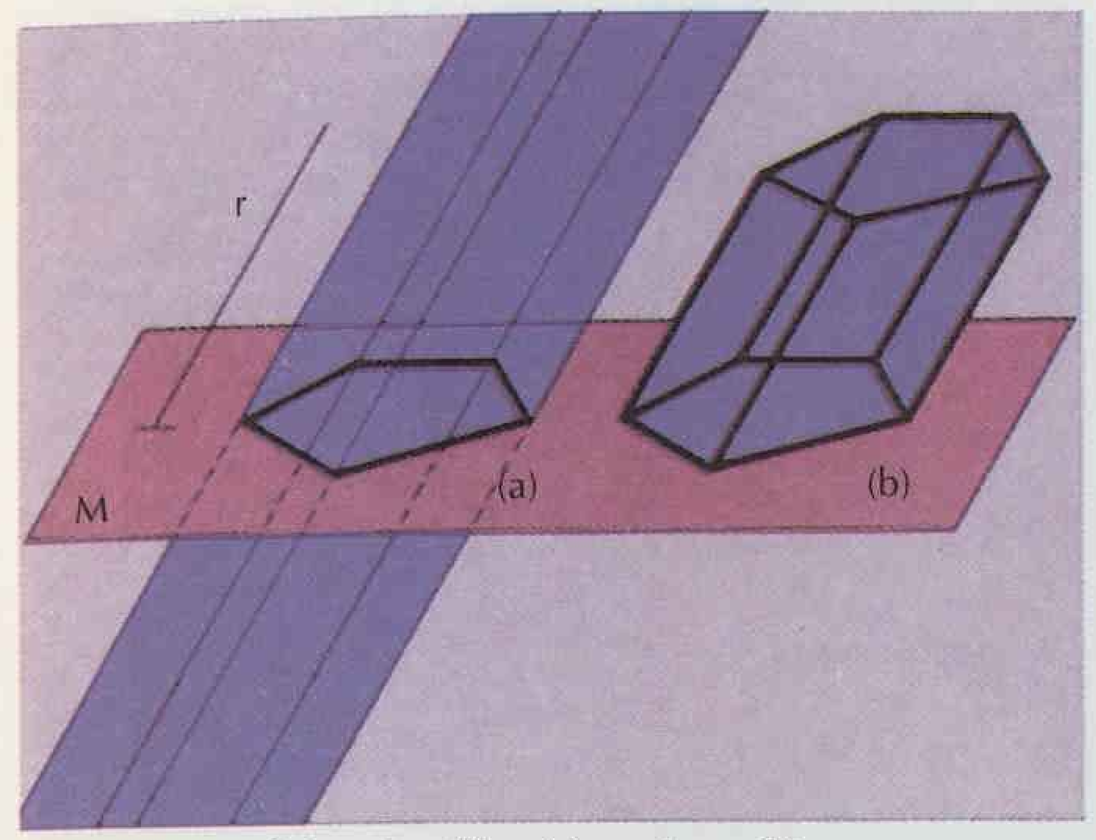


Fig. 1 – Superficie prismática (a) y prisma (b).

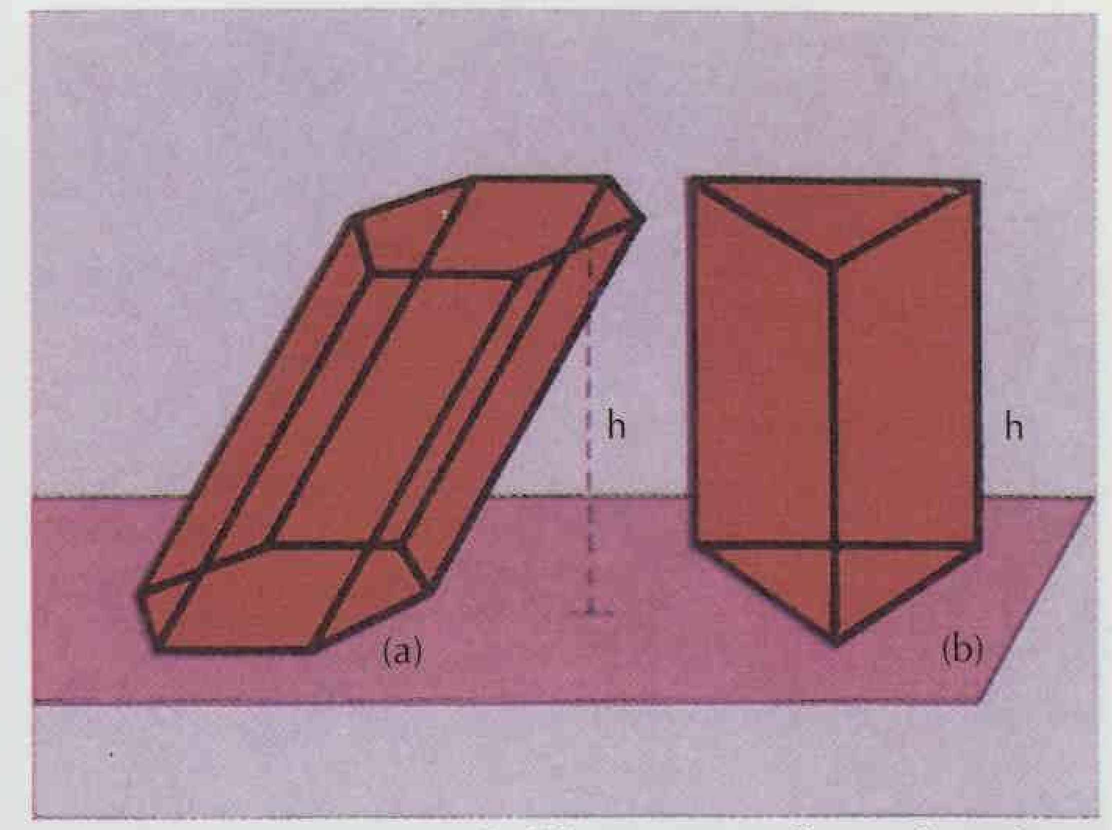


Fig. 2 – Prisma hexagonal oblicuo (a) y prisma triangular recto (b).

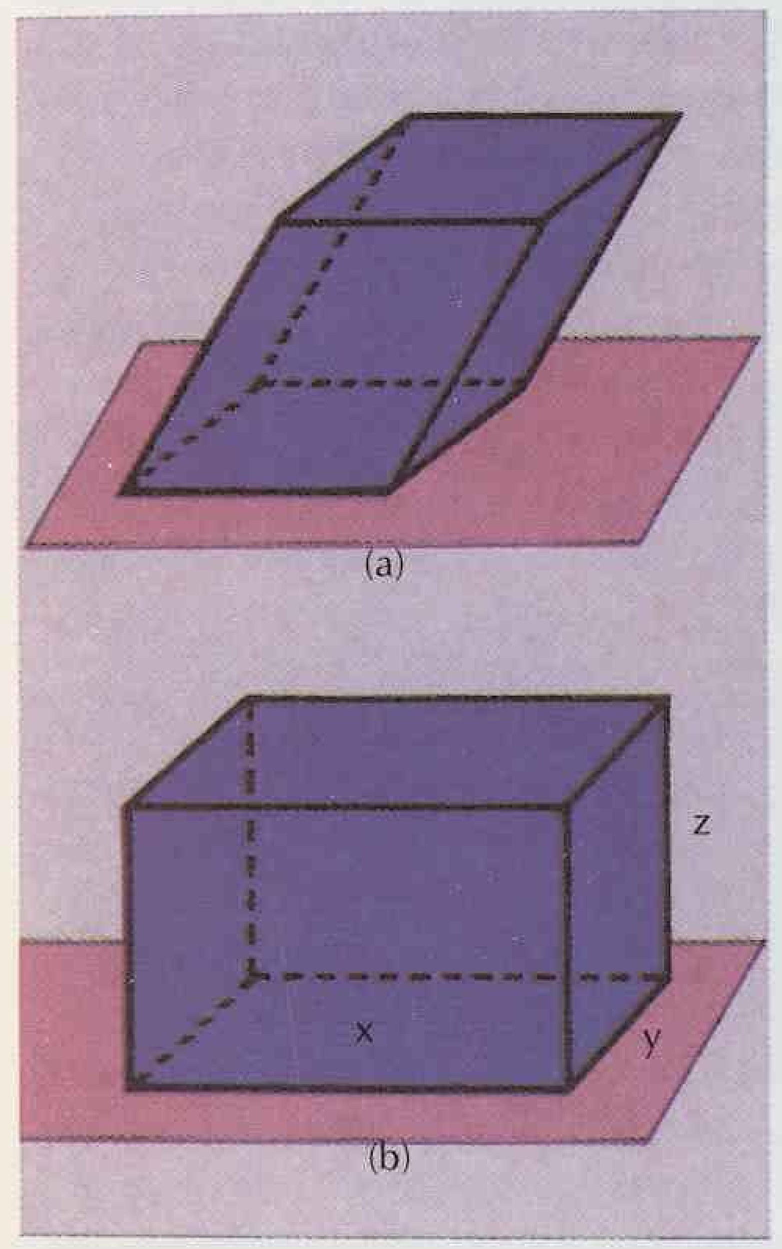


Fig. 3 – Paralelepípedo (a) y ortoedro (b).

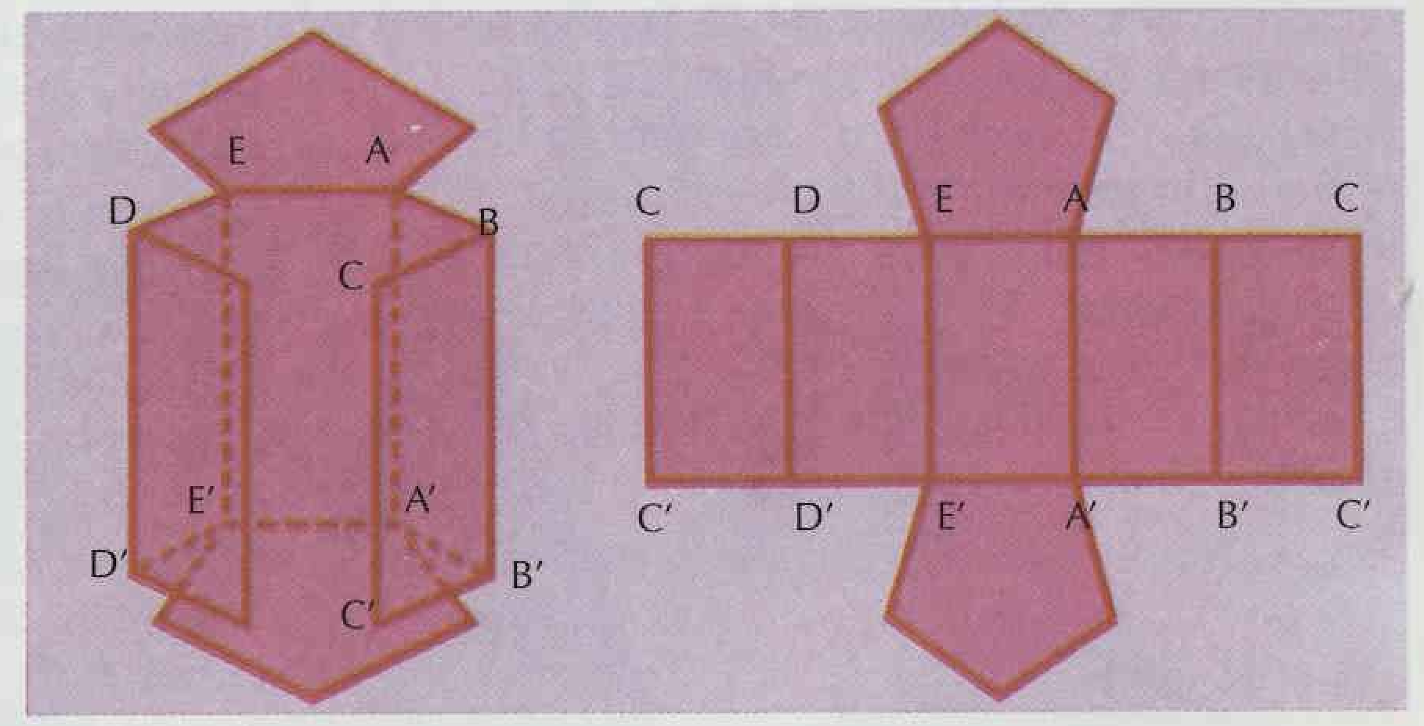


Fig. 4 – Desarrollo del prisma recto.

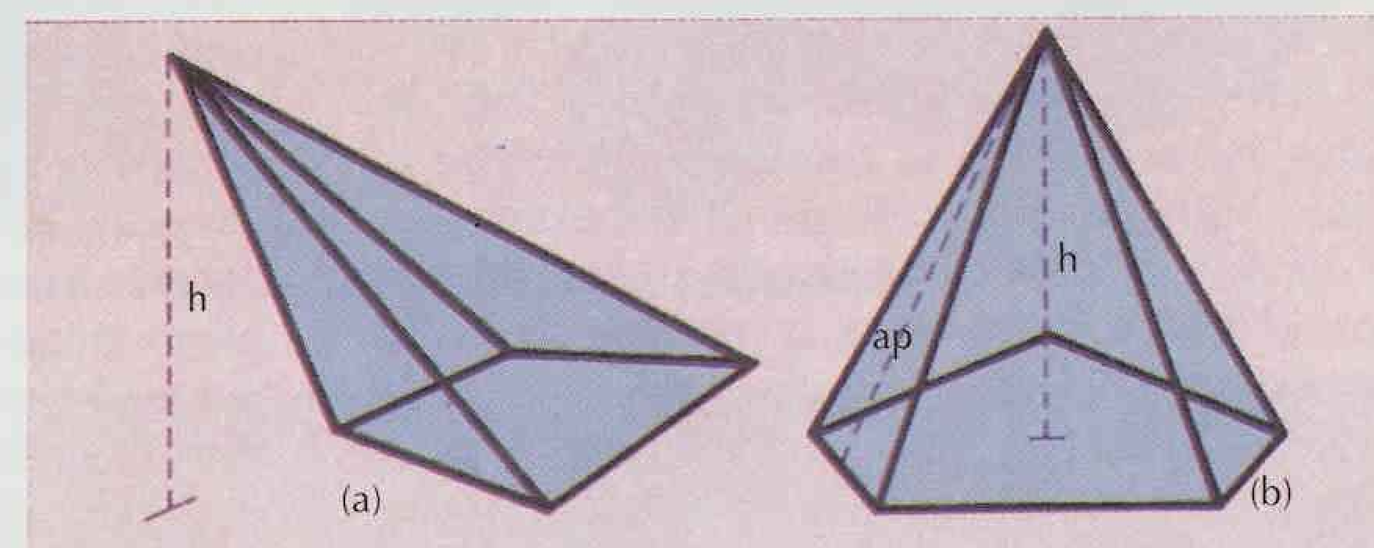


Fig. 5 – Pirámide irregular cuadrangular (a) y pirámide regular pentagonal (b).

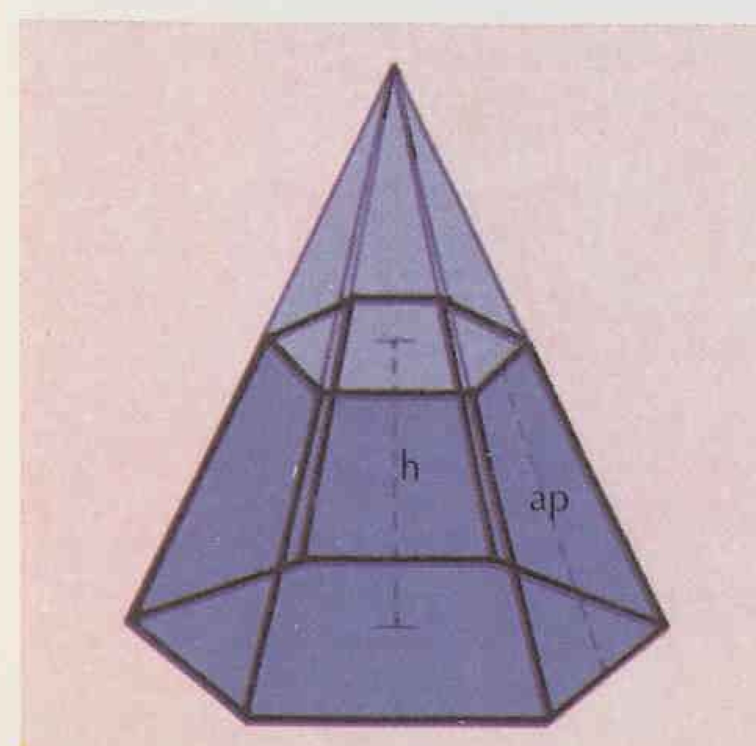


Fig. 6 – Tronco de pirámide.

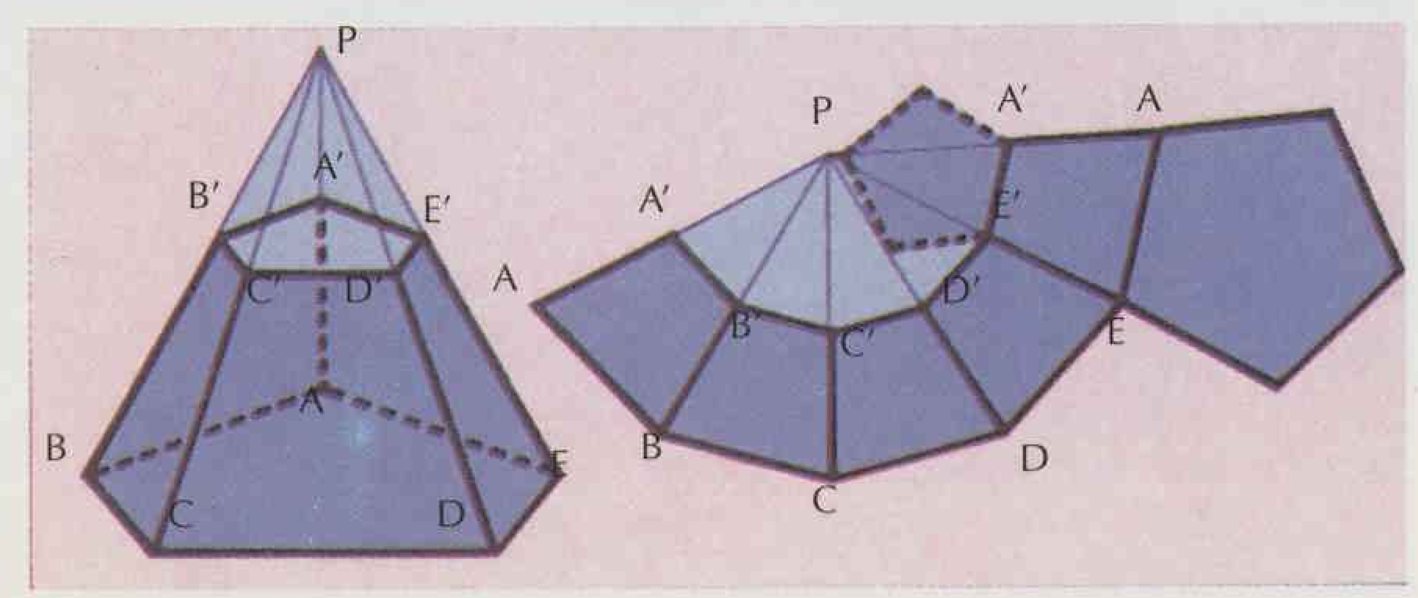


Fig. 7 – Desarrollo de la pirámide y de su tronco.

CILINDROS

Elementos. Si tenemos una curva cerrada C sobre un plano M y una recta r no paralela a él, los puntos de las rectas paralelas a r que pasan por puntos de C constituyen una *superficie cilíndrica* (fig. 1a), siendo tales rectas sus *generatrices.* Al cortarla por otro plano paralelo a M se limita un cuerpo llamado *cilindro* con una «pared» compuesta por segmentos llamados *generatrices* del cilindro (fig. 1b) y dos *bases* iguales en forma y tamaño. La distancia h entre los planos de las bases es la *altura.* Un cilindro es *recto* cuando las generatrices son perpendiculares a las bases.

Cilindro de revolución

Un cilindro recto de base circular se llama *cilindro de revolución* (véase B/14-1). Su altura y sus generatrices tienen igual longitud (fig. 1d).

Desarrollo. Se obtiene al extender sobre un plano las bases y el rectángulo que surge al cortar la pared a lo largo de una generatriz (fig. 1e).

Área y volumen. Si el radio de la base es r y la altura h, el *área lateral,* o «de la pared», el *área total,* suma de la lateral con las de las bases y el *volumen* son, respectivamente

$$A_{lat} = 2\pi rh,\ A_{tot} = 2\pi rh + 2\pi r^2,\ Vol = \pi r^2 h.$$

CONOS

Elementos. Las rectas que unen un punto (*vértice*) con los puntos de una curva cerrada de un plano constituyen una *superficie cónica,* siendo tales rectas las *generatrices* (fig. 2a). Se llama *cono* (fig. 2b) al cuerpo limitado por la *base* —que es la porción plana encerrada por la curva—, y los segmentos que unen el vértice con el borde de la base, a los que se llama *generatrices* del cono. La *altura* del cono es la del vértice sobre la base (*h* en fig, 2b). Al seccionar por un plano paralelo a la base se obtiene un cono más pequeño (*cono deficiente*) y un *tronco de cono,* cuya base «superior» es de igual forma que la inferior, pero más reducida. La *altura* del tronco es la distancia entre las bases (fig. 2d).

Cono de revolución

Un cono de base circular cuyo centro sea, además, pie de la altura, es llamado *cono de revolución* (fig. 2c) (véase ejercicio B/14-2).

Desarrollo. Cortando por una generatriz se llega al abatimiento plano del cono de revolución o de su tronco (fig. 2e).

Área y volumen del cono. Sea r el radio de la base, h la altura y g la generatriz, relacionables por $g^2 = h^2 + r^2$. El *área lateral* (de la «pared»), el *área total* (lateral más la base) y el *volumen* son

$$A_{lat} = \pi rg,\ A_{tot} = \pi rg + \pi r^2,\ Vol = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Área y volumen del tronco de cono. Sean r el radio de la base inferior, s el de la superior, h la altura y g la generatriz, que se relacionan por $g^2 = h^2 + (r - s)^2$. Se tiene

$$A_{lat} = \pi g(r + s),\ A_{tot} = A_{lat} + \pi r^2 + \pi s^2,$$

$$Vol = \frac{\pi h}{3}(r^2 + s^2 + rs)$$

ESFERA

Elementos. El conjunto de puntos del espacio cuya distancia a un punto dado (llamado *centro*) es un mismo número r, es una *superficie esférica,* o *esfera, de radio r.* También se llama esfera al cuerpo que limita tal superficie. Las rectas y planos que pasan por el centro se llaman *diametrales. Radio* es cualquier segmento que una el centro con un punto de la superficie. Un segmento que una dos puntos de la esfera pasando por el centro es un *diámetro.* Un plano corta a una esfera en una circunferencia de radio en general inferior al de la esfera, sólo igual si el plano es diametral. El cuerpo, y su superficie, quedan divididos en dos *casquetes esféricos,* llamados *hemisferios* si el plano es diametral. Si se corta la esfera con dos planos paralelos, la parte entre ambos es un *segmento esférico;* su «pared» se llama *zona esférica* y tiene dos círculos como bases. Dos semiplanos diametrales separan en la esfera una *cuña esférica.* La parte correspondiente de superficie esférica en un *huso esférico.*

Un *plano tangente* es uno que toque a la esfera en un solo punto, llamado *punto de contacto.* El plano tangente es perpendicular al radio por el punto de contacto. Las rectas que pasan por el punto de contacto de un plano tangente, contenidas en él, se llaman *rectas tangentes* a la esfera.

Áreas y volúmenes. En las siguientes fórmulas r es el radio de la esfera. Las figuras describen el significado de h, a, b y n.

Área esfera $= 4\pi r^2$. Vol. esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

Área casquete esférico $= 2\pi rh$.

Vol. casquete esférico $= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$.

Área zona esférica $= 2\pi rh$.

Vol. segmento esférico $= \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(a^2 + b^2)$.

Área huso esférico $= \frac{\pi r^2 n}{90}$ (n en grados).

Vol. cuña esférica $= \frac{\pi r^3 n}{90}$.

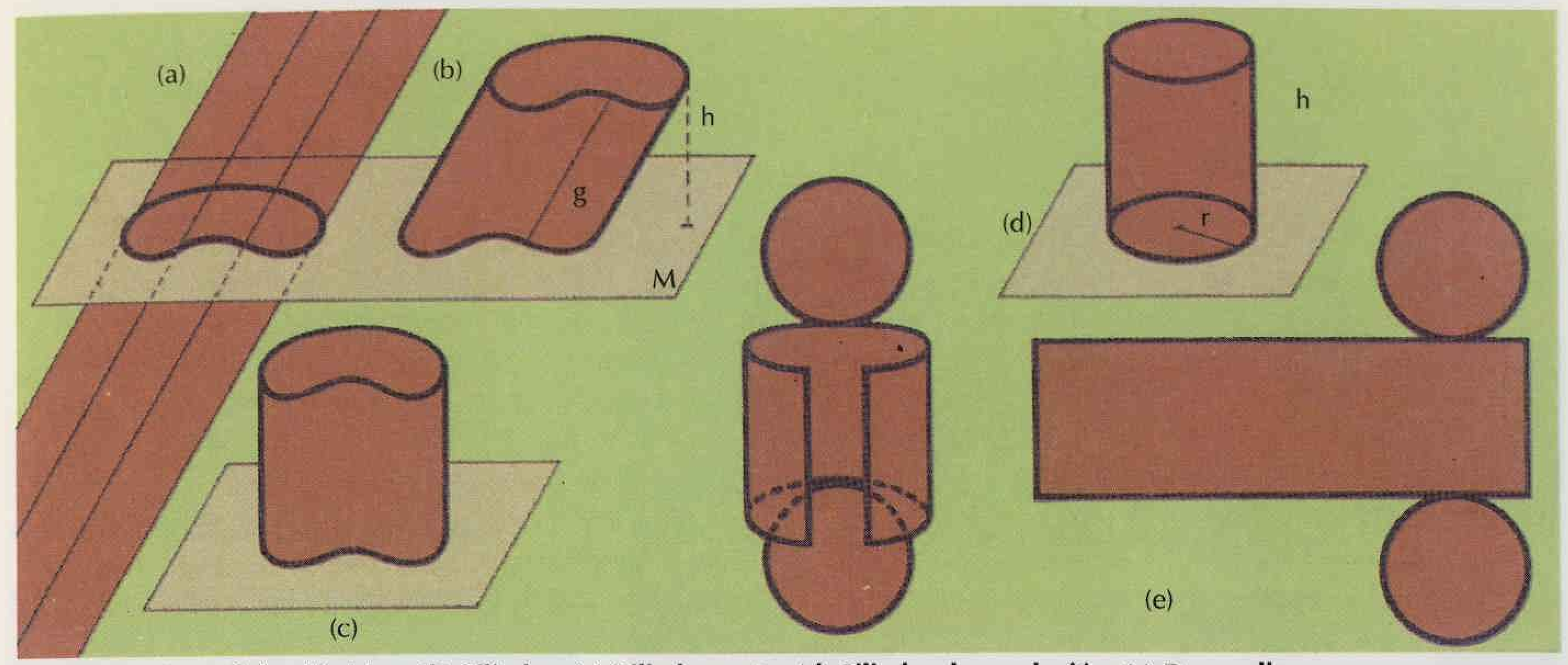


Fig. 1 – (*a*) Superficie cilíndrica. (*b*) Cilindro. (*c*) Cilindro recto. (*d*) Cilindro de revolución. (*e*) Desarrollo.

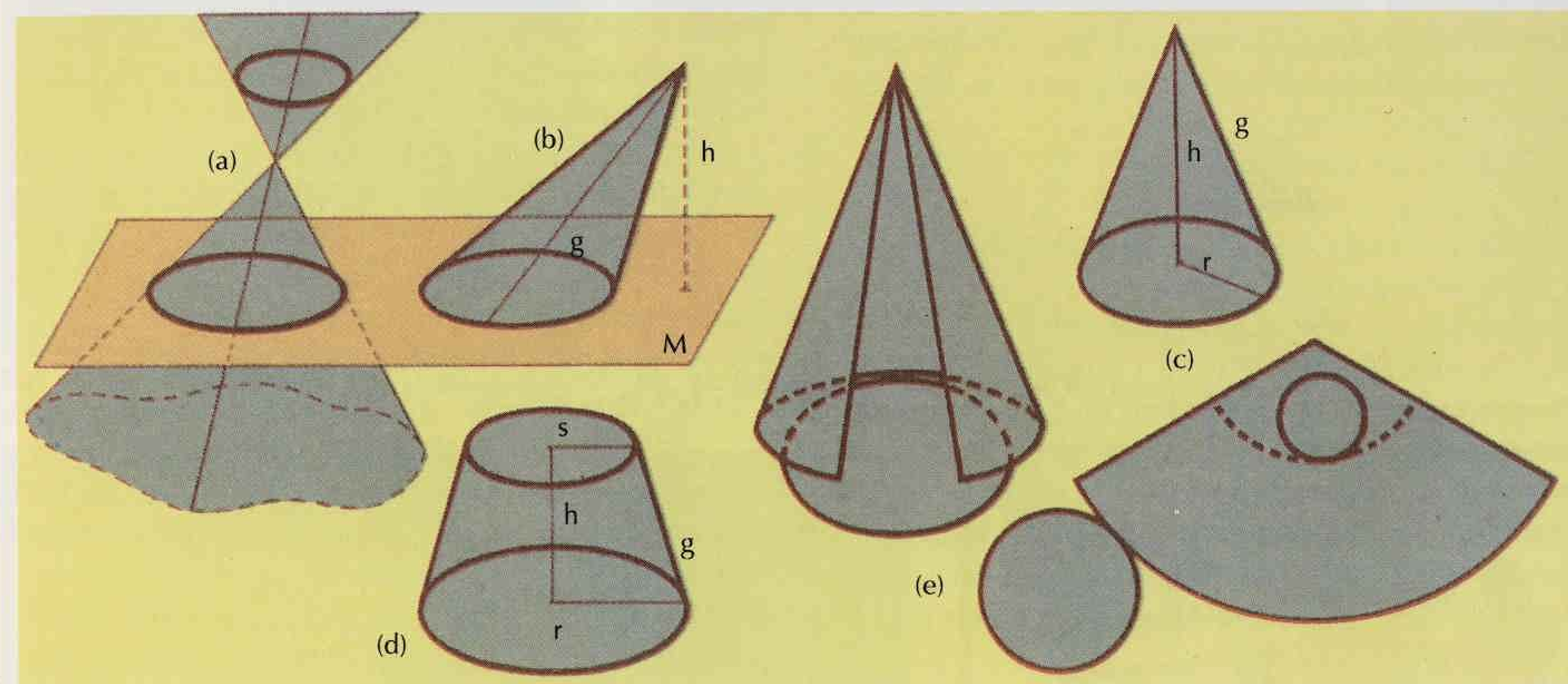


Fig. 2 – (*a*) Superficie cónica. (*b*) Cono. (*c*) Cono de revolución. (*d*) Tronco de cono. (*e*) Desarrollo.

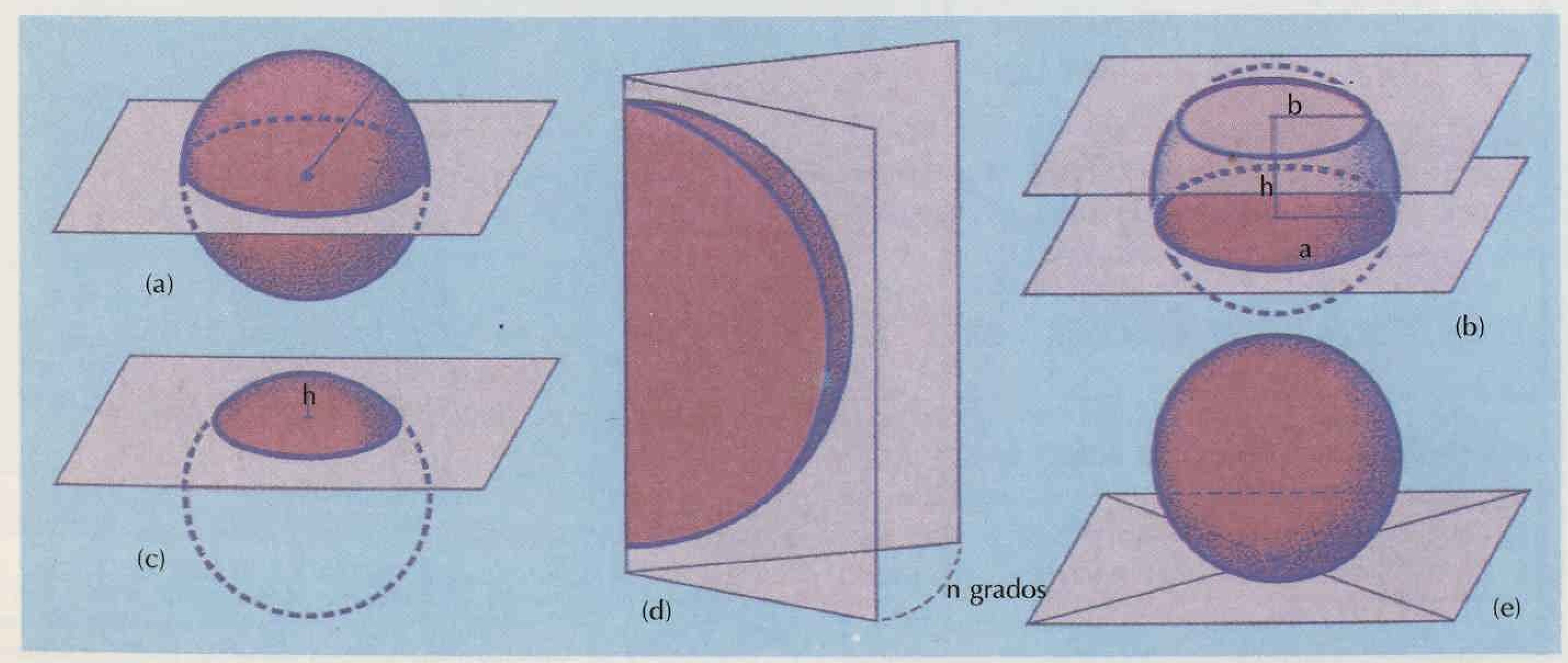


Fig. 3 – (*a*) Esfera. (*b*) Segmento y zona esféricos. (*c*) Casquete esférico. (*d*) Cuña y huso esféricos. (*e*) Plano y rectas tangentes.

Geometría analítica

VECTORES FIJOS Y VECTORES LIBRES EN EL PLANO

Vectores fijos

El plano $\mathbf{R}^2$ es el conjunto producto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, cuyos elementos son pares ordenados de números reales y se llaman puntos del plano.
Un *vector fijo* es un segmento orientado, es decir, cada uno de estos vectores queda unívocamente determinado por un par ordenado de puntos (A, B) del plano $\mathbf{R}^2$. El vector **AB** de la figura 1 tiene su origen en A y su extremo en B. Un vector cuyo origen y extremo coincidan **MM**, se llama *vector nulo* y su representación gráfica es un punto.

Equipolencia de vectores fijos

Definición: AB y **CD**, vectores fijos, se dice que son equipolentes si se cumple una de las tres condiciones (figura 2):
ABCD es un paralelogramo,
AB y *CD* son nulos,
existe un tercer vector *EF* de modo que *ABFE* y *CDFE* son paralelogramos.
Definición 2: AB es equipolente a **CD** si los puntos medios de **AD** y **BC** coinciden (fig. 3).
Propiedades de la equipolencia. La equipolencia de vectores es una relación de equivalencia (ver A/2), que denotaremos $\sim$.
Dado un punto cualquiera C del plano y un vector fijo **AB**, también arbitrario, existe un único vector fijo equipolente a **AB** con origen en C.

Vectores libres

Llamaremos *vector libre* [**AB**] al conjunto constituido por el vector fijo **AB** y sus equipolentes:

$$[\mathbf{AB}] = \{\mathbf{XY} \in \mathbf{R}^2 \,/\, \mathbf{XY} \sim \mathbf{AB}\}$$

Comúnmente se representa un vector libre utilizando un elemento del conjunto, $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, en lugar de [**AB**]. El conjunto de todos los vectores libres del plano se representa por V_2.

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

Suma de vectores

Dados dos vectores libres **u** y **v**, el vector suma se obtiene situando el origen de **v** coincidiendo con el extremo de **u**. El vector que une el origen de **u** con el extremo de **v** es el vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. No importa con qué origen se haga la construcción ya que el resultado es el mismo en todos los casos. Si **u** y **v** no tienen la misma dirección puede utilizarse también la *regla del paralelogramo* para la suma (figura 4).

Propiedades de la suma. Se cumplen las siguientes propiedades;
— *Asociativa*: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} = (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
— *Conmutativa*: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
— *Existencia de elemento neutro*: Si **0** representa la clase de los vectores fijos nulos, se verifica $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$, para todo **v**.
— *Todo vector tiene opuesto o simétrico*: Para todo vector **u** es posible hallar otro, que se simboliza por $-\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Si **u** está representado por el vector fijo **AB**, $-\mathbf{u}$ lo está por **BA**. Por consiguiente, **u** y $-\mathbf{u}$ tienen igual dirección y longitud pero sentidos opuestos.
Por tanto V_2 con esta operación interna tiene estructura de *grupo conmutativo*.

Producto de un número real por un vector

Dado $\mathbf{v} \in V_2$ y un real positivo ($r \in \mathbf{R}$, $r > 0$), el producto de r por **v** es otro vector que se simboliza escribiendo $r \cdot \mathbf{v}$, tal que su dirección y sentido coinciden con los de **v** y su longitud es el producto de la **v** por r (es «r veces» la de **v**).
Si r es negativo, entonces $(-r) \cdot \mathbf{v} = -r \cdot \mathbf{v}$, es decir, $-r \cdot \mathbf{v}$ es el *opuesto* de $r \cdot \mathbf{v}$ (fig. 5.)
Propiedades del producto. Dados **u** y $\mathbf{v} \in V_2$, y r y $s \in \mathbf{R}$, se cumplen las propiedades:

$$r \cdot (s \cdot \mathbf{v}) = (rs) \cdot \mathbf{v}, \quad r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v},$$
$$(r + s) \cdot \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}, \quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Otras propiedades que pueden deducirse de la definición y de las anteriorres son: $r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $r \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ sólo si $r = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
Con frecuencia a este producto se le denomina *producto por un escalar o por escalares*, no debiéndose confundir con el producto escalar (ver C/2).

Concepto de espacio vectorial real

Sea E un conjunto en el que está definida una operación «suma» (+), de modo que $(E, +)$ es un grupo conmutativo. Se tiene definida, además, otra operación que asocia a cada elemento de E, y a cada número real un nuevo elemento de E, satisfaciendo las mismas propiedades que el producto que se ha definido en el apartado anterior. Se dice entonces que E es un *espacio vectorial real* (a veces abreviamos por *espacio vectorial*).
V_2 tiene estructura de espacio vectorial. Si en lugar de trabajar con vectores sobre el plano $\mathbf{R}^2$ lo hacemos sobre el espacio $\mathbf{R}^3$, todas las propiedades vistas hasta aquí son también válidas; entonces el conjunto V_3 de vectores libres del espacio, con las operaciones suma de vectores y producto de un número real por un vector, tienen estructura de espacio vectorial real.

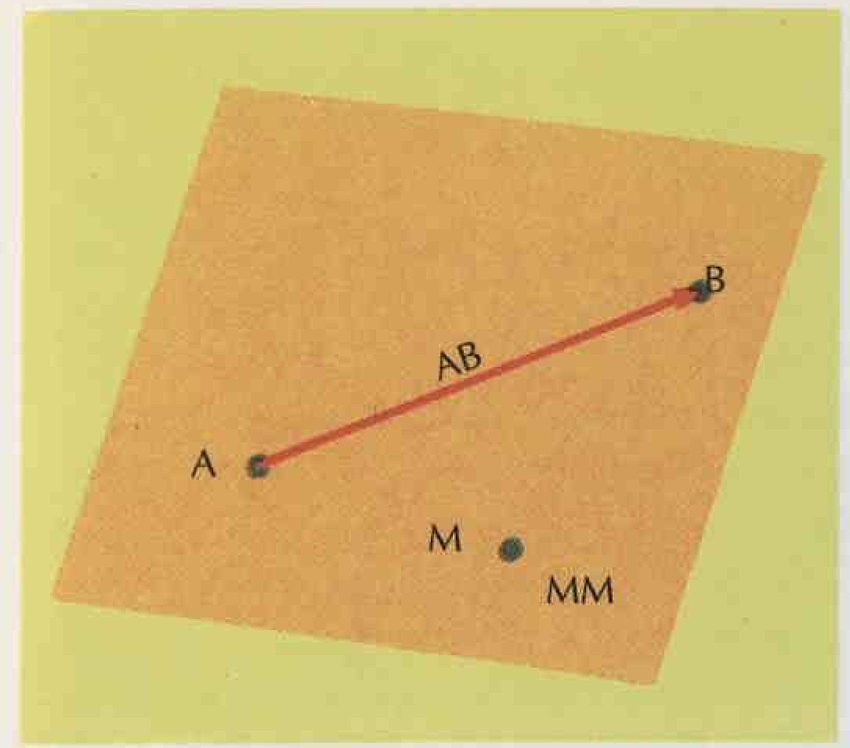


Fig. 1 – Definición de vector en un plano.

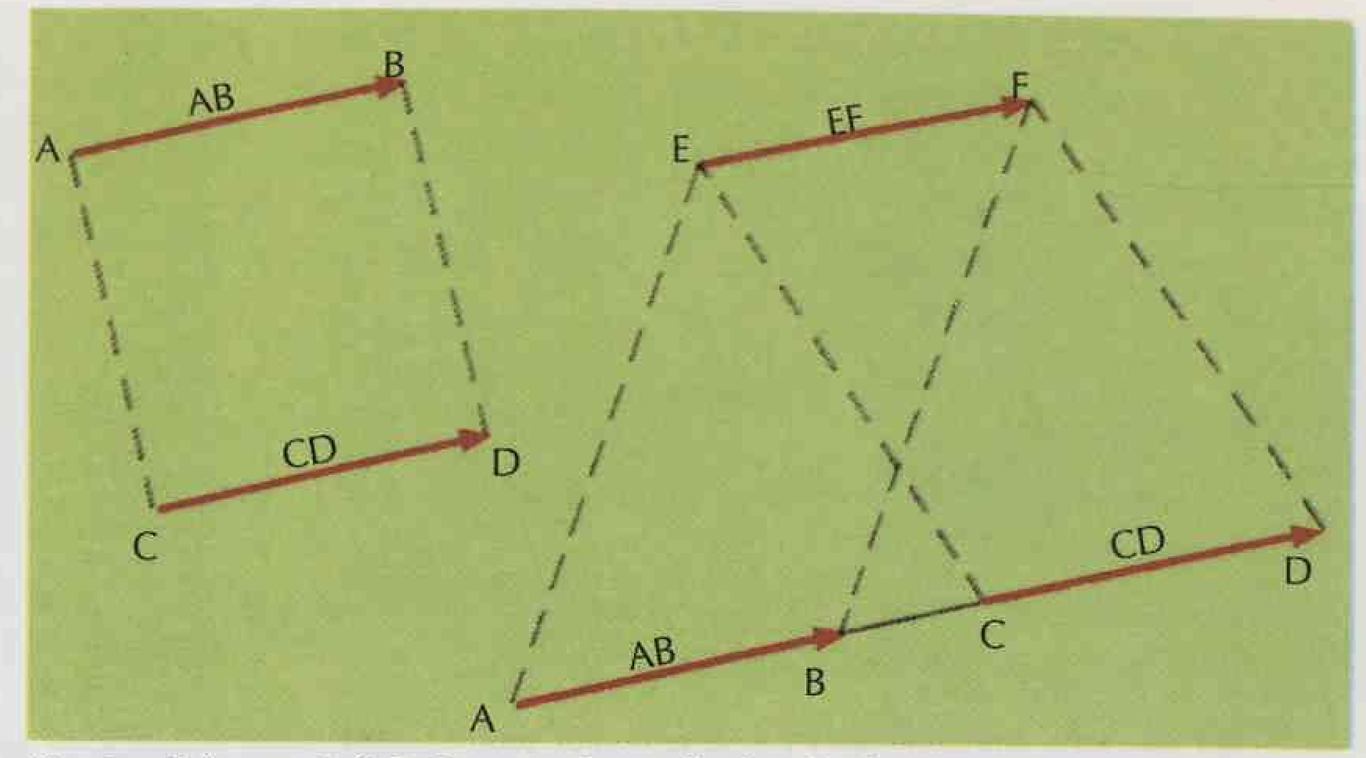


Fig. 2 – Primera definición para la equipolencia de vectores.

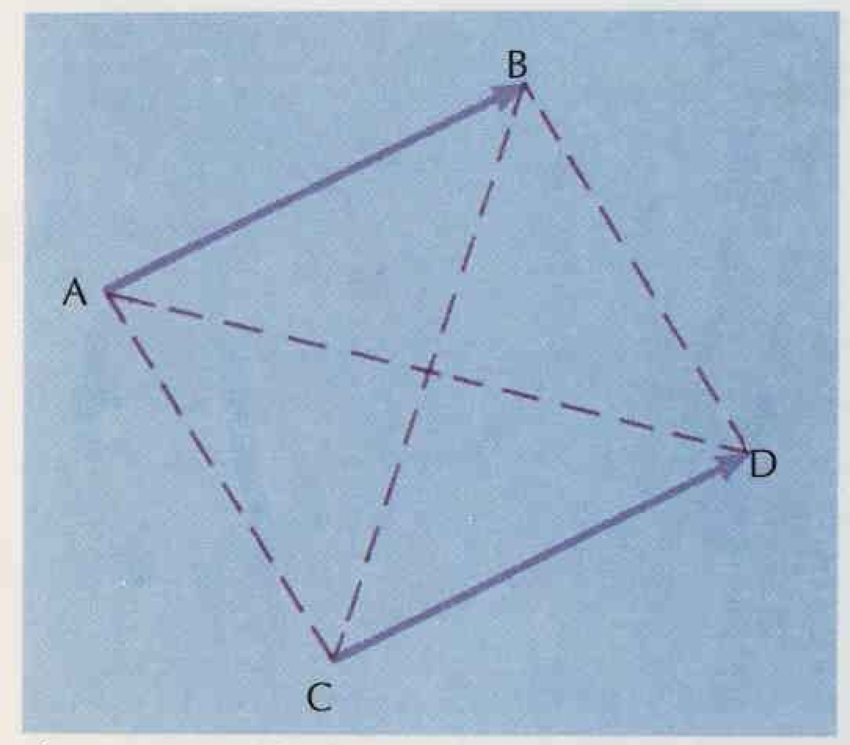


Fig. 3 – Segunda definición para la equipolencia de vectores.

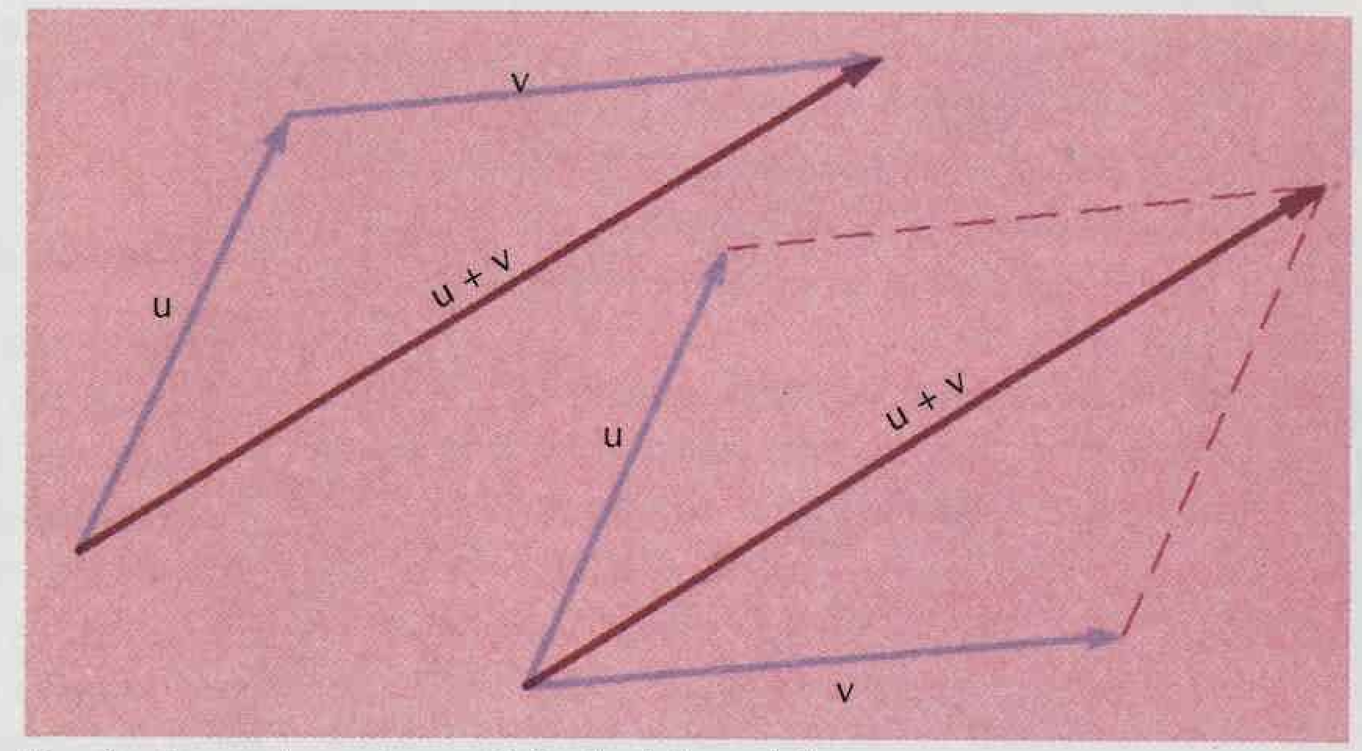


Fig. 4 – Suma de vectores. Método del paralelogramo.

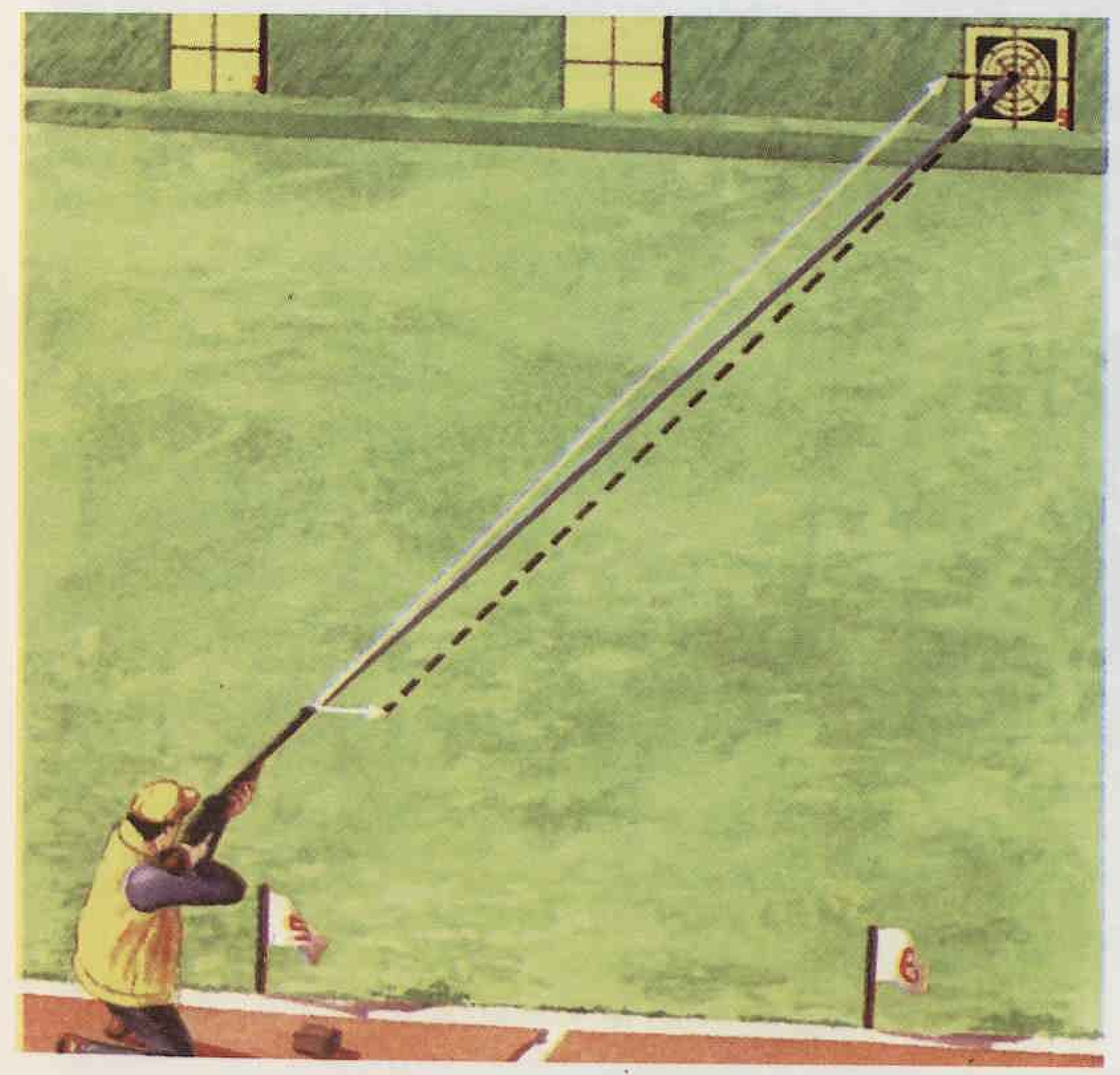


Fig. 5 – Para compensar la velocidad del viento $\vec{v_2}$, el hombre que dispara mueve ligeramente el rifle hacia la izquierda del blanco y el disparo va al blanco según la dirección de $\vec{R} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$.

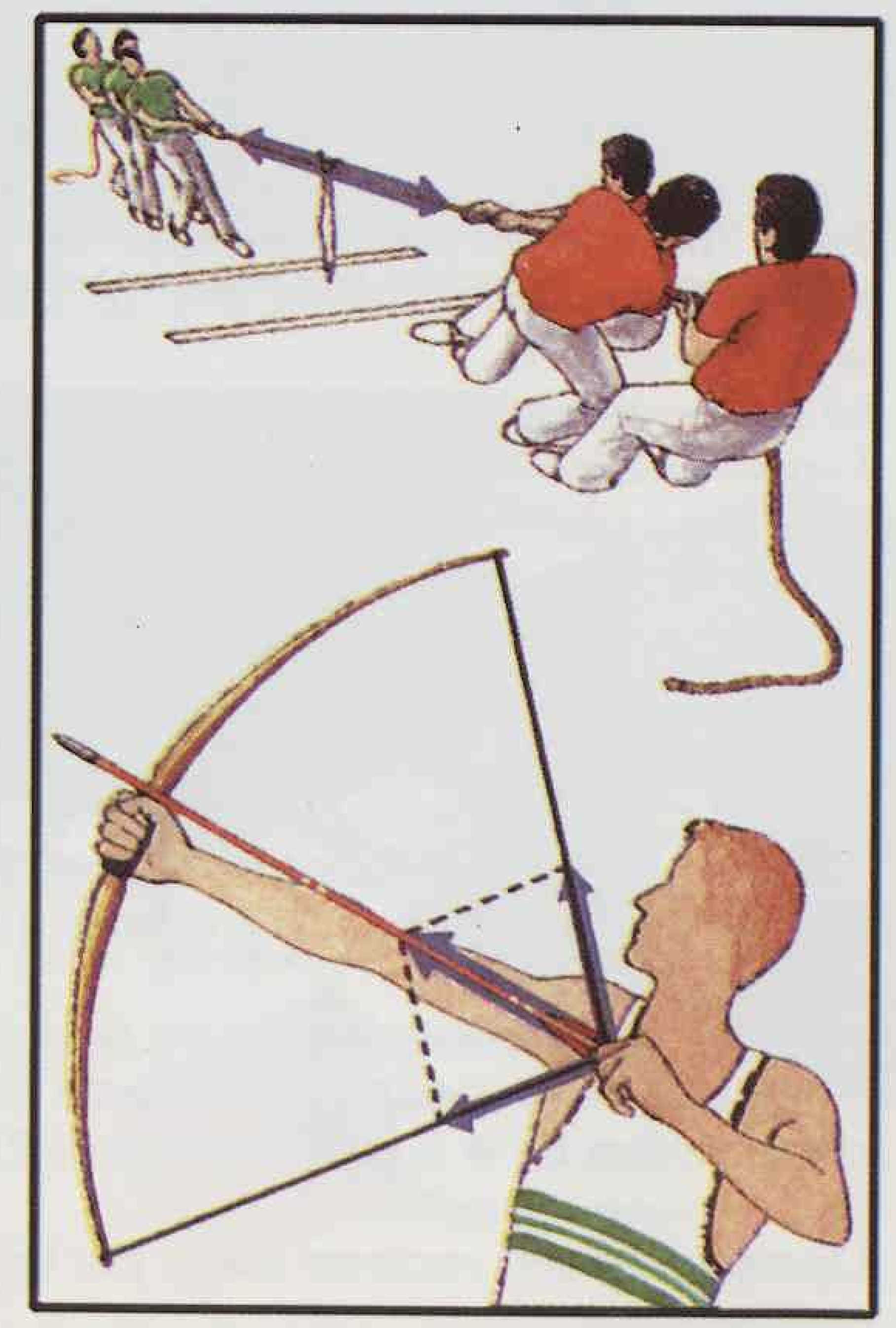


Fig. 6 – El comportamiento dinámico de los sistemas físicos exige el estudio de la composición vectorial de sus fuerzas.

Dependencia e independencia de vectores

Dependencia lineal de dos vectores. Dados los vectores **u** y **v** pertenecientes a un espacio vectorial sobre los reales, se dice que **u** *depende linealmente* de **v** si existe $r \in \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{u} = r \cdot \mathbf{v}$. Dos vectores son *linealmente dependientes* si al menos uno de ellos depende del otro; en caso contrario se dirá que son *linealmente independientes.*

Dos vectores dependientes representados con origen común se hallan sobre la misma recta, y recíprocamente. Si se representan con distinto origen, se hallarán sobre rectas paralelas.

Consecuencias inmediatas de estas definiciones son:

— El vector cero depende de cualquier otro vector ($\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u}$),

— Todo vector depende de sí mismo ($\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u}$),

— Dados dos vectores no nulos, si uno depende del otro, este otro también depende del primero.

— Si **u** depende de **v**, y **v** depende de **w**, entonces **u** depende de **w**.

Dependencia lineal de tres vectores. Se dice que **u** es una *combinación lineal* de **v** y **w**, si es posible hallar dos números reales a y b, tales que $\mathbf{u} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$. Se dice que **u**, **v** y **w** son *linelamente dependientes* si alguno de ellos es combinación de los otros dos. En caso contrario se dirá que son *linealmente independientes.* Como puede observarse, las nociones de dependencia e independencia lineal pueden generalizarse para un número mayor de vectores.

Teorema fundamental de la dependencia. Dados **u** y **v** pertenecientes a V_2, si son dos vectores linealmente independientes, es posible hallar dos números reales a y b, tales que $\mathbf{w} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}$.

Se dice entonces que el par de vectores **u** y **v** forman una *base* de V_2, y que el par (a, b) es el par de componentes de **w** en esa base (respectivamente, primera y segunda componente). (Ver figura 1.)

En V_3 la definición es análoga; dados **u**, **v** y **t**, vectores independientes de V_3 (no deben estar dos de ellos alineados, ni tres en el mismo plano), si **w** es otro vector de V_3, existen tres números reales únicos a, b y c, tales que $\mathbf{w} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v} + c \cdot \mathbf{t}$.

Entonces **u**, **v** y **t** constituyen una *base* de V_3 y la terna de números (a, b, c) se llama terna de componentes de **w** en esa base (figura 2).

Operaciones con vectores dados por sus componentes

Dados los vectores **x** e **y** de V_2, cuyas componentes en una cierta base son respectivamente (x_1, x_2) e (y_1, y_2), las componentes de $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ son $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ (fig. 3) y las componentes de $r \cdot \mathbf{x}$ son (rx_1, rx_2).

Estos resultados se generalizan sin dificultad a V_3.

• **Ejemplo.** Sean $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{z} = (-2, 0, 1)$ las componentes en una base dada, **u**, **v**, de V_3. **x** e **y** son independientes ya que no existe un número real tal que $r \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$; en efecto, si así sucediera se tendría $r \cdot (1, 1, 1) = (-2, 0, 1)$, en consecuencia, r debería valer simultáneamente -2, 0 y 1, lo cual es imposible. Los tres vectores también son linealmente independientes ya que, si por ejemplo existiesen dos reales r y s tales que $\mathbf{z} = r \cdot \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{y}$, entonces se tendría que $(-2, 0, 1) = r \cdot (1, 1, 1), + s \cdot (1, 1, 0) = (r + s, r + s, r)$ es decir debería tener solución el sistema formado por las ecuaciones $-2 = r + s$, $0 = r + s$, y $r = 1$, lo cual es imposible pues las dos primeras ecuaciones son incompatibles.

Módulo de un vector

Dado un vector libre **v**, se denomina *módulo de dicho vector*, $|\mathbf{v}|$, a la longitud de uno de los vectores fijos que lo representan.

Propiedades del módulo de un vector:

— Para cualquier vector **v**, $|\mathbf{v}| \geq 0$. Si $|\mathbf{v}| = 0$, entonces $\mathbf{v} = 0$.

— Dado un vector cualquiera **v**, y un real r, se cumple que $|r \cdot \mathbf{v}| = |r| \cdot |\mathbf{v}|$.

— Para **u** y **v** vectores cualesquiera, se cumple $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ (desigualdad triangular, fig. 4). De estas propiedades, es fácil deducir que $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$. Si el módulo de un vector vale uno, se dice que es *unitario* ($|\mathbf{u}| = 1$).

Producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores **v** y **w** que forman un ángulo α ($0 \leq \alpha \leq 180°$), su producto escalar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, se define como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\alpha & \text{si } \mathbf{v} \neq 0 \text{ y } \mathbf{w} \neq 0, \\ = 0 & \text{si } \mathbf{v} = 0 \text{ o } \mathbf{w} = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 90°$, se dice que **v** y **w** son *ortogonales*, lo cual acostumbra a escribirse $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. Ello equivale a que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Propiedades del producto escalar. El producto escalar es

— *Definido positivo*: Concretamente, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$. Si $\mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 0$,

— *Conmutativo:* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$,

— *Homogéneo:* $\mathbf{v} \cdot (k \cdot \mathbf{w}) = (k \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,

— *Distributiva*: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Cuando los vectores se expresan en componentes en una base formada por vectores unitarios y ortogonales entre sí, se tiene

$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd \text{ en } V_2,$$

$$(a, b, c) \cdot (m, n, p) = am + bn + cp \text{ en } V_3.$$

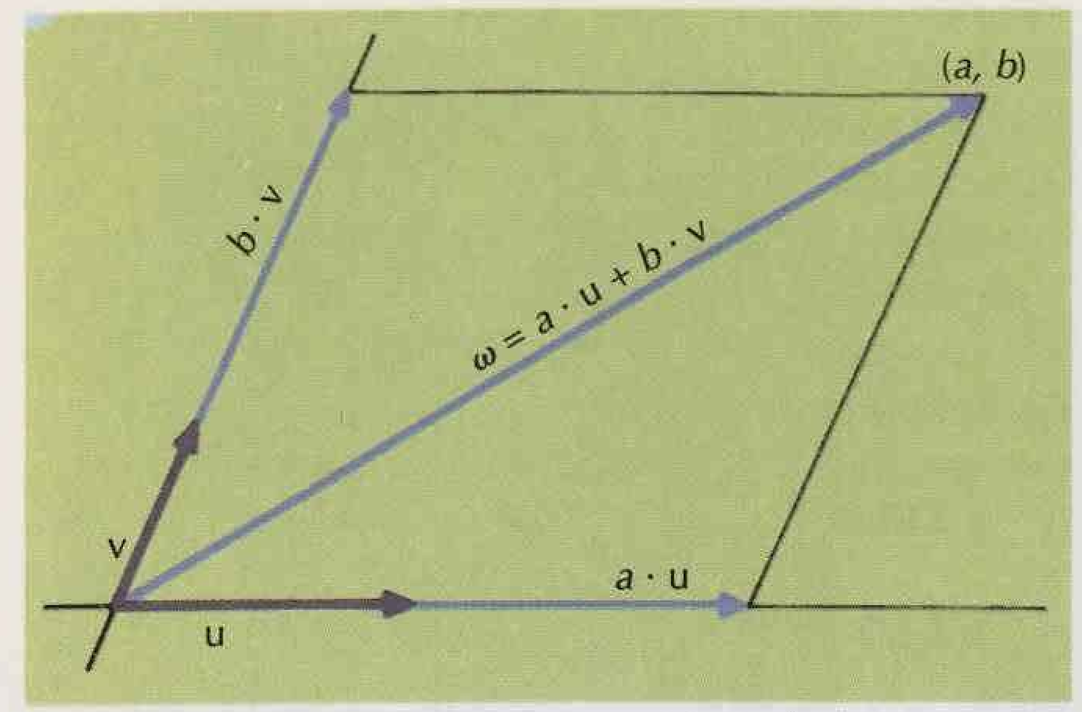


Fig. 1 – Los vectores u y v forman una base de V_2.

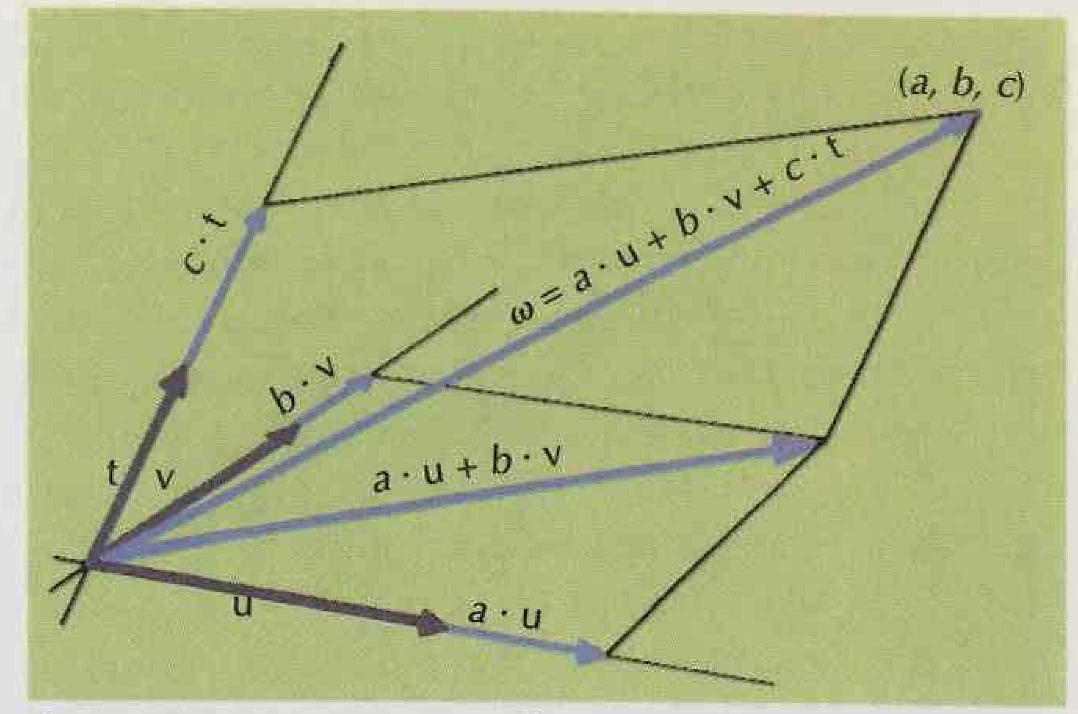


Fig. 2 – Los vectores u, v y t forman una base de V_3.

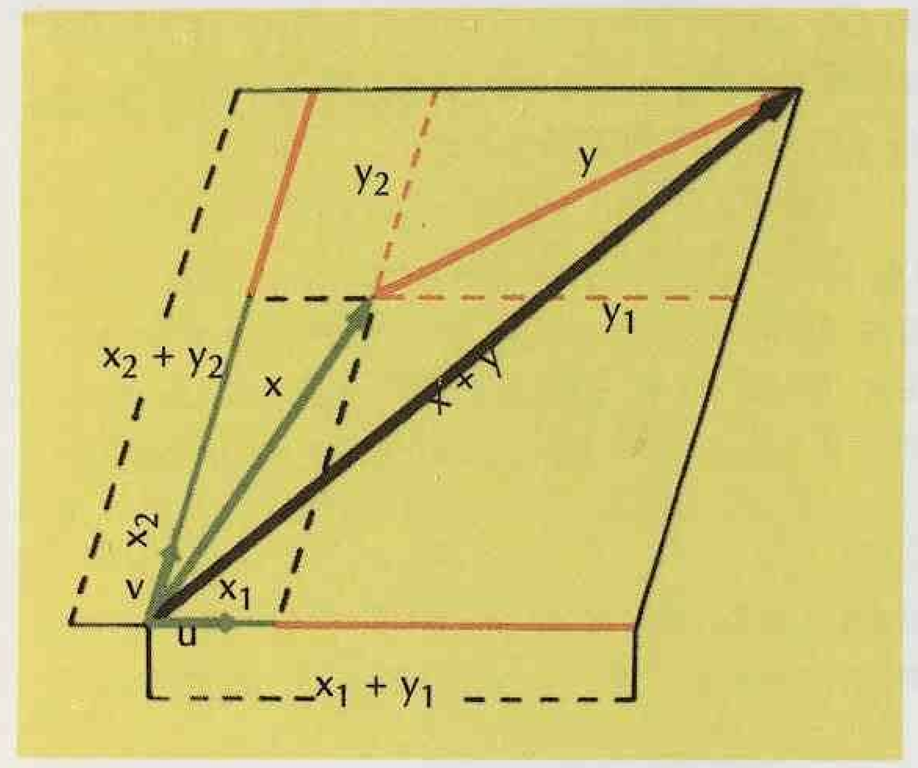


Fig. 3 – El vector x + y de V_2, expresado como suma de las componentes de los vectores x e y, en la base de u, v.

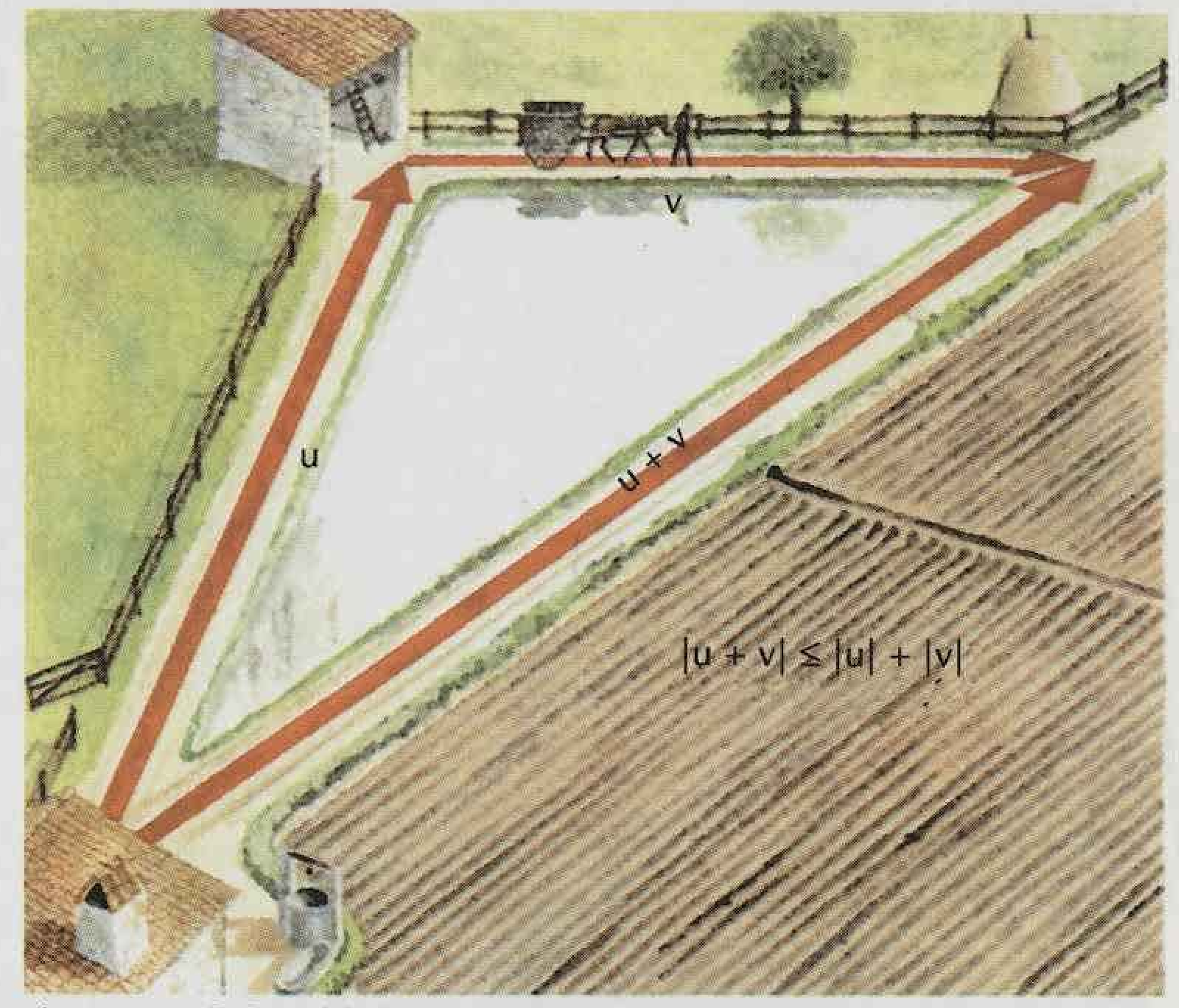


Fig. 4 – La desigualdad triangular para módulos de vectores.

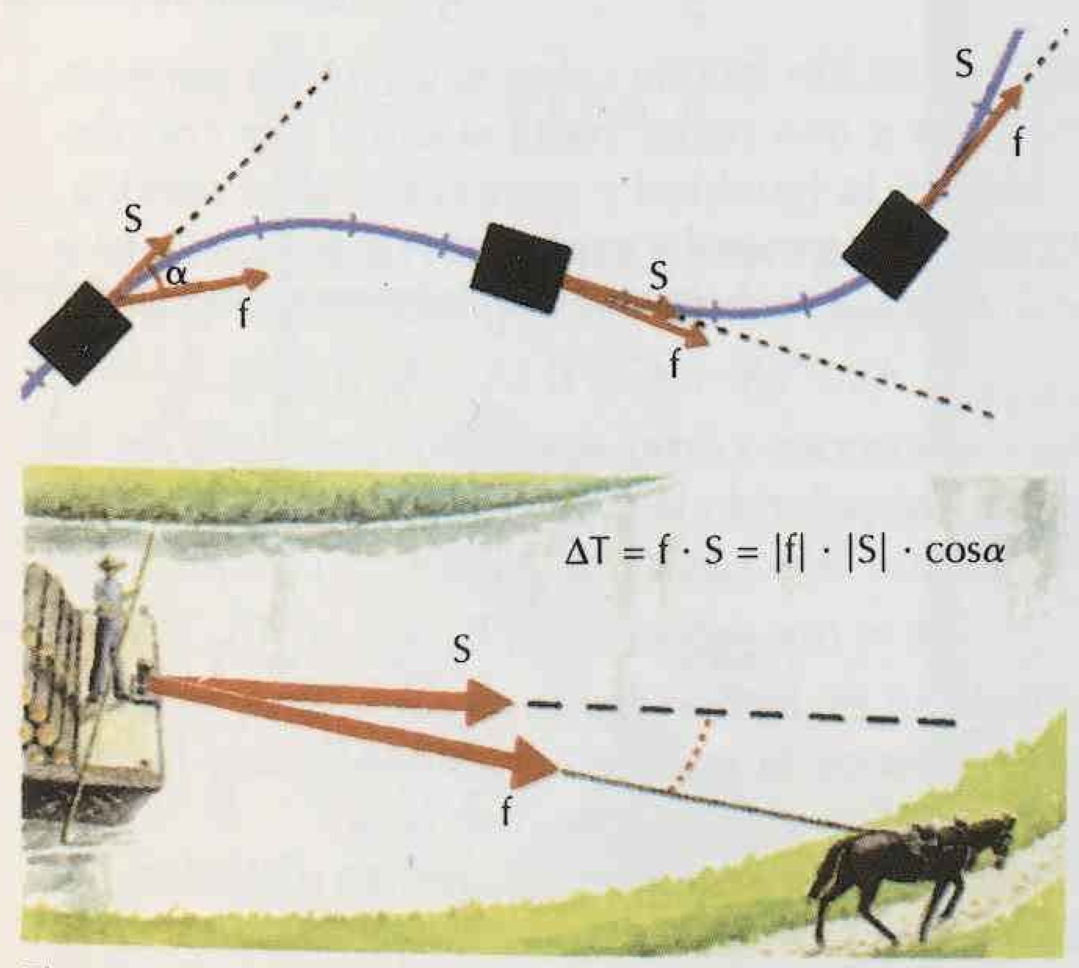


Fig. 5 – El trabajo que realiza el caballo varía a cada paso, pues varía el ángulo entre la dirección del movimiento S, y la dirección del arrastre f.

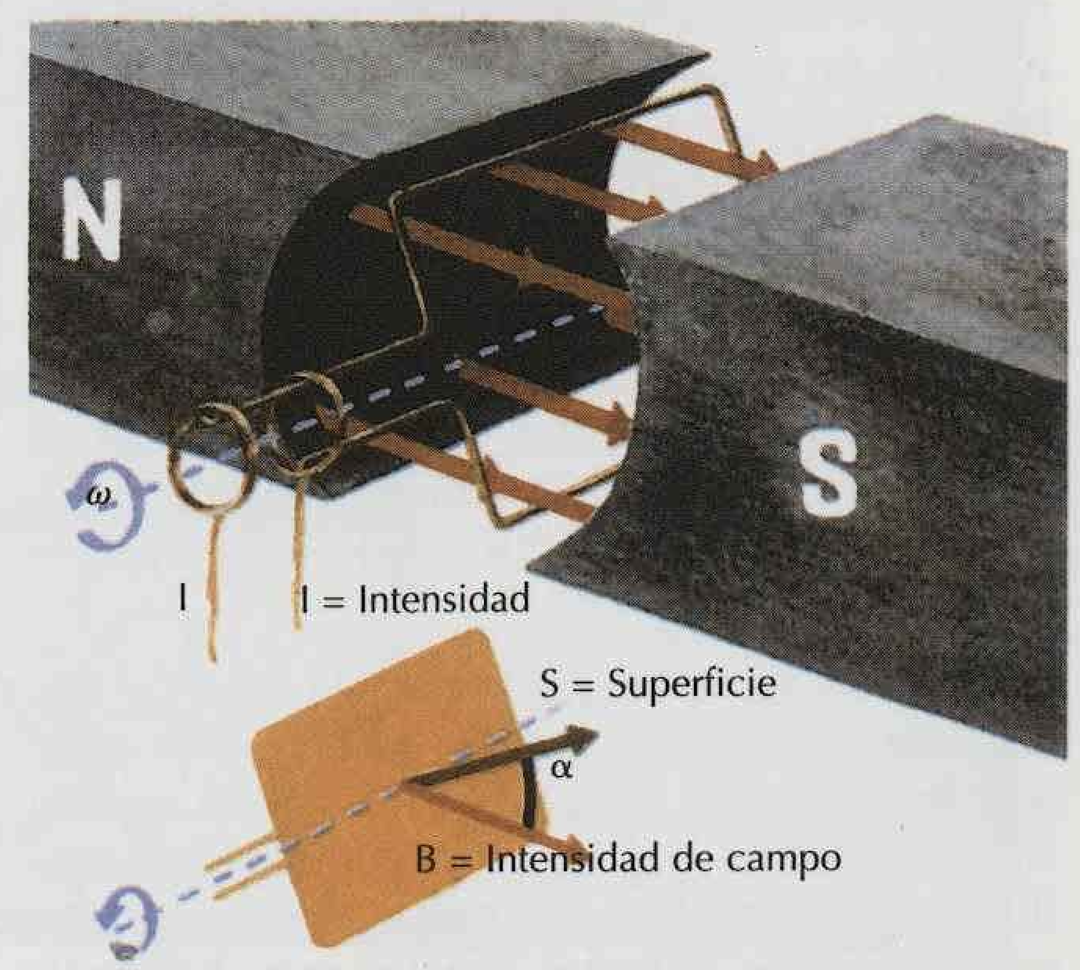


Fig. 6 – Al girar la espira, la intensidad de la corriente inducida es proporcional a la fuerza electromotriz E, que depende del flujo que atraviesa la superficie: E = – d(B · S)/dt.

COORDENADAS CARTESIANAS

A principios del siglo XVII, Descartes y Fermat sentaron las bases de la geometría analítica. En el tratado de Descartes, *Discurso del método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias, con aplicaciones a la dioptría, meteorología y geometría,* se da una primera exposición de la geometría analítica. La geometría analítica se basa en dos conceptos fundamentales: el de coordenadas de un punto y el de comparación entre las ecuaciones con dos incógnitas y las curvas de un plano, que permiten asimilar una curva del plano a cada ecuación algebraica del tipo $F(x, y) = 0$.

Coordenadas de un punto en el plano

Dado un plano y el conjunto de vectores libres de él, sean un punto O del plano y una base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ del espacio vectorial V_2. Dichos puntos y base constituyen un *sistema de coordenadas del plano* en cuestión. El punto O se denomina *origen coordenadas del plano.*
Las coordenadas de un punto cualquiera del plano, A, en este sistema son, por definición, las componentes del vector **OA** en la base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Las rectas que pasan por el origen de coordenadas y que siguen las direcciones de los dos vectores que forman la base se llaman *ejes de coordenadas.* Fijado un sistema de coordenadas con origen en O y dado un vector libre **AB**, se cumple la relación **OA** + **AB** = **OB**, y por tanto **AB** = **OB** – **OA**. Pero las componentes **OA** son precisamente las coordenadas de A, mientras que las componentes de **OB** son las coordenadas de B. En consecuencia, las componentes de un vector con origen en el punto A y extremo en el punto B, se obtienen restando a las coordenadas de B (extremo) las de A (origen); simbólicamente se representa escribiendo **AB** = $B - A$.

• **Ejemplo.** Dado el sistema de coordenadas (O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) de la figura 3, el vector **AB** tiene coordenadas (4, 1) ya que **AB** = **OB** – **OA** = = (5, 2) – (1, 1) = (4, 1) [también puede escribirse **AB** = (5**u** + 2**v**) – (1**u** + 1**v**)= 4**u** + 1**v**].

Cuando los vectores que forman la base del sistema de coordenadas son perpendiculares entre sí y de longitud igual a uno, se dice que se trata de un *sistema de coordenadas cartesianas* (figura 4) y son los que usaremos en todo lo sucesivo. Estos sistemas son los que, habitualmente, permiten una interpretación geométrica más sencilla de las curvas representadas por las funciones $y = f(x)$. El primer eje de coordenadas se conoce como *eje de abscisas,* o *eje de X,* mientras que el segundo eje se conoce como *eje de ordenadas,* o *eje Y.* Sobre el eje de abscisas se representan los valores de la variable independiente x, sobre el de ordenadas los correspondientes a la variable dependiente y. Un plano en el cual se ha definido un sistema de coordenadas cartesianas se conoce como *plano cartesiano.* En la figura 5 pueden verse las curvas que corresponden a algunas ecuaciones de la forma $y = f(x)$, en el plano cartesiano.

ECUACIONES DE LAS RECTAS EN EL PLANO

Recta determinada por un punto y un vector

Ecuación vectorial. Sea un punto P_0 del plano cartesiano y un vector libre $\mathbf{v} \in V_2$, no nulo. El conjunto de todos los puntos del plano que son de la forma $P = P_0 + r\mathbf{v}$, con $r \in \mathbf{R}$, forman una recta. Su *ecuación vectorial* es

$$(x, y) = (x_0, y_0) + r\,(a, b),$$

donde (x, y) y (x_0, y_0) son las coordenadas de P y P_0 respectivamente, y (a, b) las componentes del *vector director* **v**. Este vector puede ser sustituido en la ecuación por cualquier otro vector paralelo a él (es decir que sea proporcional a él, ver C/2).

Ecuaciones paramétricas y continua. Separando componentes en la ecuación vectorial, queda

$$x - x_0 = ra$$
$$y - y_0 = rb$$

son las *ecuaciones paramétricas* de la recta, en las cuales r es el parámetro. Despejando r, se obtiene la *ecuación continua de la recta,*

$$\frac{(x - x_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b}.$$

Esta ecuación facilita saber si un punto pertenece o no a una recta: basta sustituir sus coordenadas en la igualdad y comprobar si se verifica.

Ecuaciones general y explícita. Puesto que $(a, b) \neq$ $\neq 0$, la ecuación contina se puede transformar en

$$Ax + By + C = 0 \; (A = b,\; B = a)$$

que se conoce como *ecuación cartesiana* de la recta. Despejando la y de esta ecuación (si $B \neq 0$) se obtiene la *ecuación explícita*

$$y = mx + h (m = -A/B,\; h = -C/B),$$

donde m es la *pendiente* de la recta y h es la ordenada de la recta en el origen (véase la primera gráfica de la figura 5).

Recta determinada por dos puntos distintos. La recta que pasa por dos puntos distintos A y B viene definida por el vector **AB**. Si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, la ecuación contina de esta recta es

$$(x - a_1)\,(b_1 - a_1) = (y - a_1)\,/\,(b_2 - a_2).$$

Fig. 1 – René Descartes (1596-1650) fundó, con Fermat, la geometría analítica.

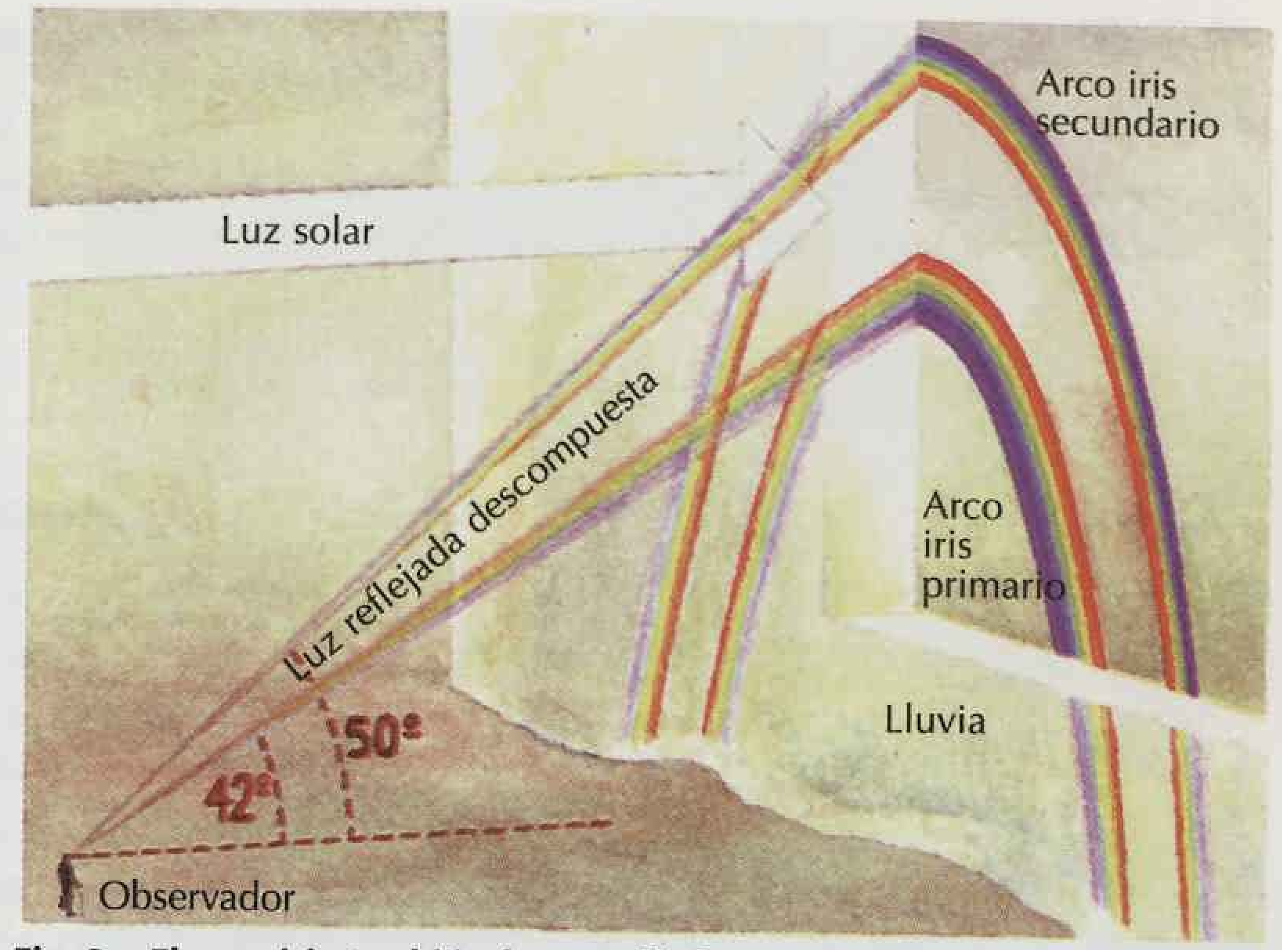
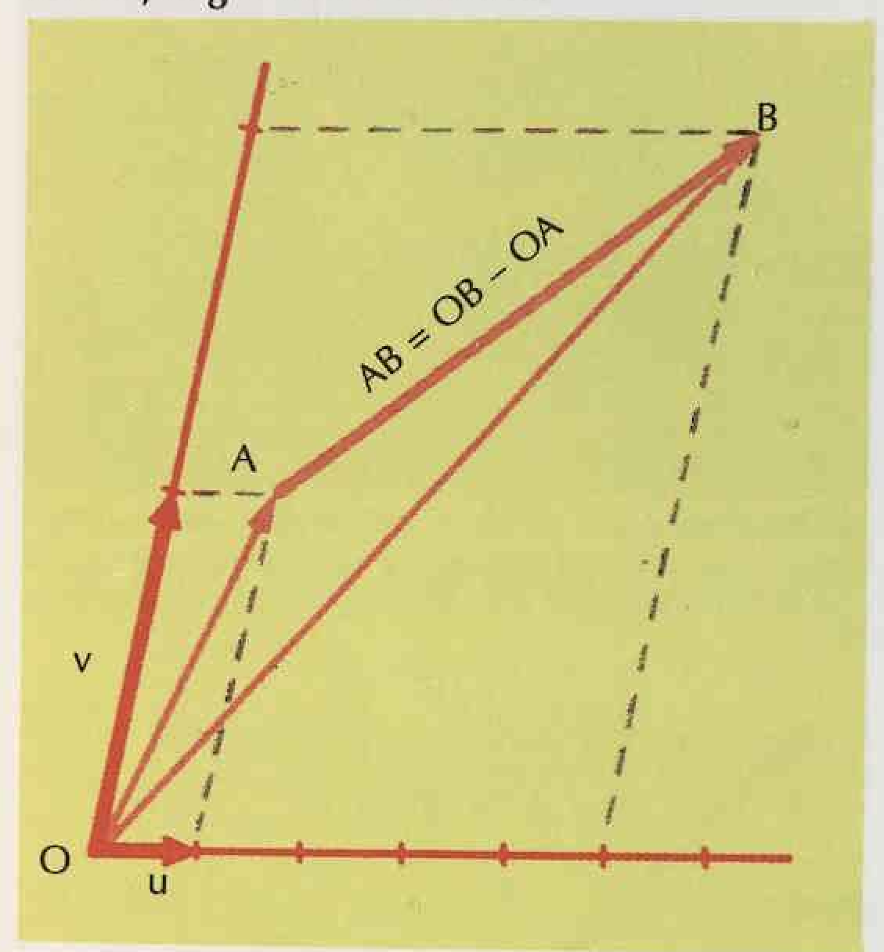


Fig. 2 – El arco iris también fue estudiado por Descartes.



Fis. 3 – Coordenadas de un vector en un sistema plano de coordenadas.

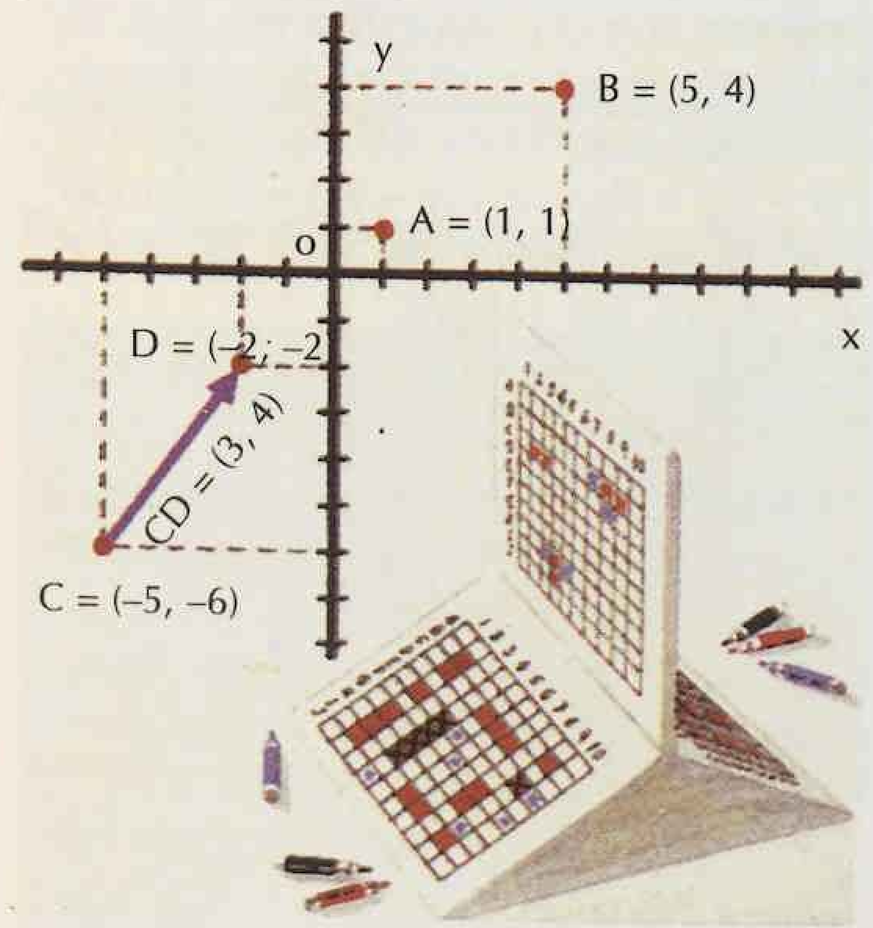


Fig. 4 – Sistema de coordenadas cartesianas.

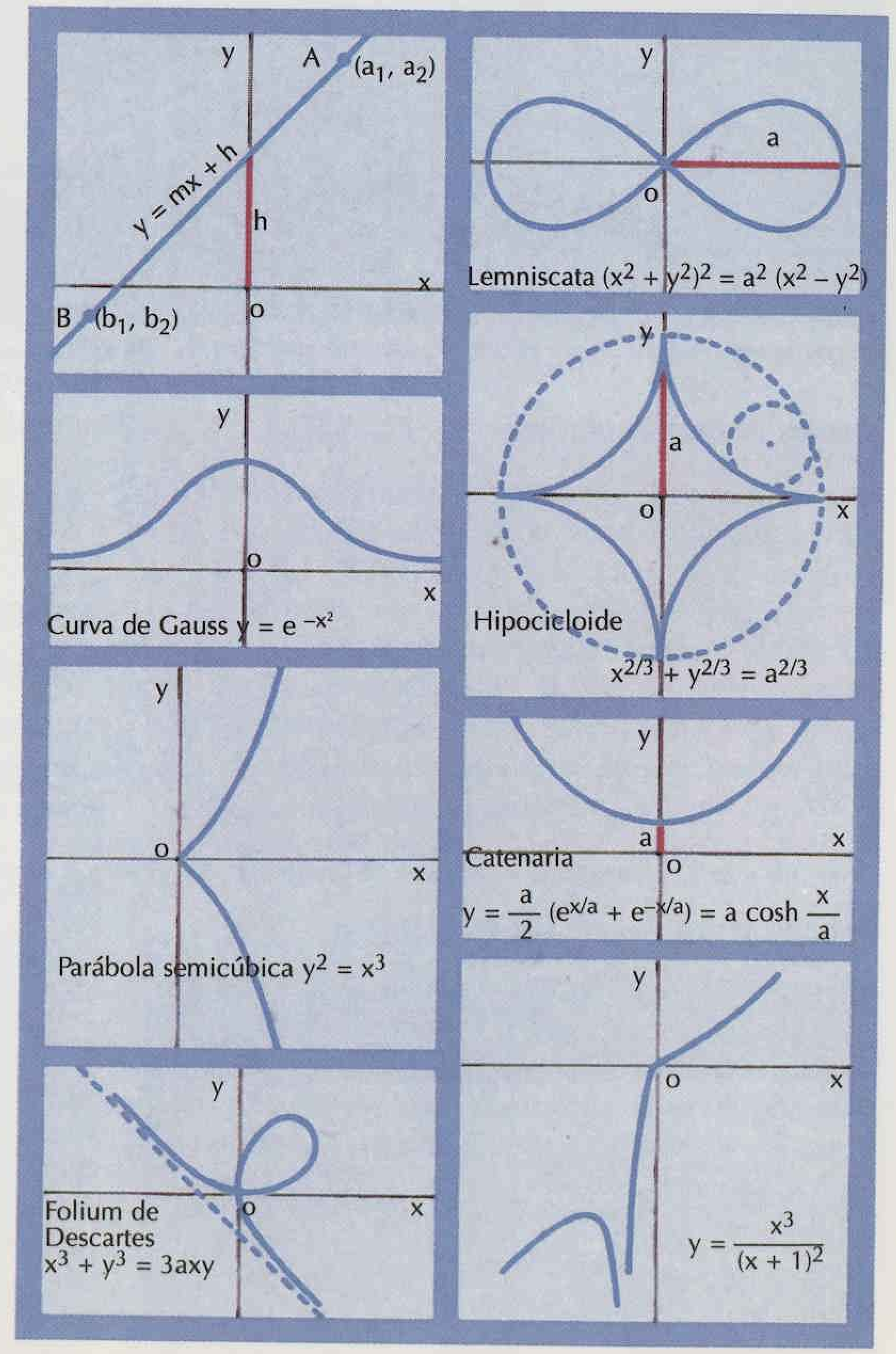


Fig. 5 – Diferentes curvas y sus ecuaciones.

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Rectas paralelas

Dos rectas son *paralelas* si los vectores que definen la dirección de cada una de ellas, *vectores directores*, son linealmente dependientes. Por tanto, dadas las recta r y r', definidas respectivamente por las ecuaciones $Ax + By + C = 0$, y $A'x + B'y + C' = 0$, son paralelas si y sólo si $A/A' = B/B'$.
Si las rectas están dadas en forma explícita, esta condición equivale a que ambas tengan la misma pendiente, $m = m'$.
Las rectas paralelas r y r' son disjuntas si $A/A' = B/B' \neq C/C'$, en caso contrario son rectas coincidentes (figura 2).
Dada la recta r, todas las rectas paralelas a ella admitirán la forma $Ax + By + C = 0$. En particular, la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) puede escribirse $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Rectas concurrentes

Dadas las rectas r y r' si $A/A' \neq B/B'$ se cortan en un punto, que es el resultado de resolver el sistema formado por las ecuaciones que definen r y r': se dice que estas dos rectas son *concurrentes*.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son *perpendiculares* si sus vectores directores son ortogonales. Esta condición se expresa $A/A' + B/B' = 0$, para dos rectas r y r', o también en función de sus pendientes, $m = -1/m'$. Dada una recta $Ax + By + C = 0$, de vector director (a, b), los vectores (A, B) y (a, b) son ortogonales (véase C/3). Una recta perpendicular a la r que pase por el punto de $(x_0 - y_0)$ tendrá como ecuación $-B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$.

Ángulo entre dos rectas en el plano

Dos rectas concurrentes r y r' determinan dos ángulos suplementarios. Por definición, el ángulo entre r y r' es el menor de dichos ángulos. Si este ángulo es α y los vectores directores de r y r' son $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$, respectivamente (figura 3), entonces $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$. Si las rectas r y r' vienen dadas por $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, respectivamente, entonces

$$\cos\alpha = \left| \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2}} \right|.$$

DISTANCIAS EN EL PLANO

Distancia entre dos puntos

Si A y B son dos puntos del plano, se llama distancia de A a B al módulo del vector $\mathbf{AB}$, y se designa por $d(A, B)$. Si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces se tiene

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB}}$$

Distancia de un punto a una recta

Dado un punto p del plano y una recta r, la recta que pasa por P y es perpendicular a r corta a ésta en un punto Q, que recibe el nombre de *proyección ortogonal* de P sobre r. Se llama *distancia* de P a r la distancia entre P y Q (que es la menor distancia entre P y cualquier punto de la recta r). Si $P = (x_0, y_0)$ y la ecuación de r es $Ax + By + C = 0$, entonces

$$d(P, r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Distancia entre dos rectas paralelas

Dadas dos rectas paralelas r y r', de ecuaciones $Ax + By + C = 0$, y $A'x + B'y + C' = 0$, los puntos de una cualquiera de ellas equidistan de otra. Se define $d(r, r') = d(P, r')$, donde P es un punto cualquiera de la recta r, por tanto se cumple que

$$d(r, r') = \left| \frac{C - C'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

APLICACIONES

Mediatriz de un segmento

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, el conjunto de puntos que equidistan de ambos se llama *mediatriz* del segmento AB. Su ecuación es $(b_1 - a_1)(x - x_0) + (b_2 - a_2)(y - y_0) = 0$, donde (x_0, y_0) es el punto medio de AB, es decir $(x_0, y_0) = (a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2$.

Bisectrices

Dadas r y r', dos rectas no paralelas, el conjunto de puntos que equidistan de ambas está formado por dos rectas perpendiculares entre sí, llamadas *bisectrices* de los ángulos que determina la intersección de r y r'. Si las ecuaciones de estas rectas son, respectivamente, $Ax + By + C = 0$, y $A'x + B'y + C' = 0$, las ecuaciones de las bisectrices son

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \text{ (figura 6)}$$

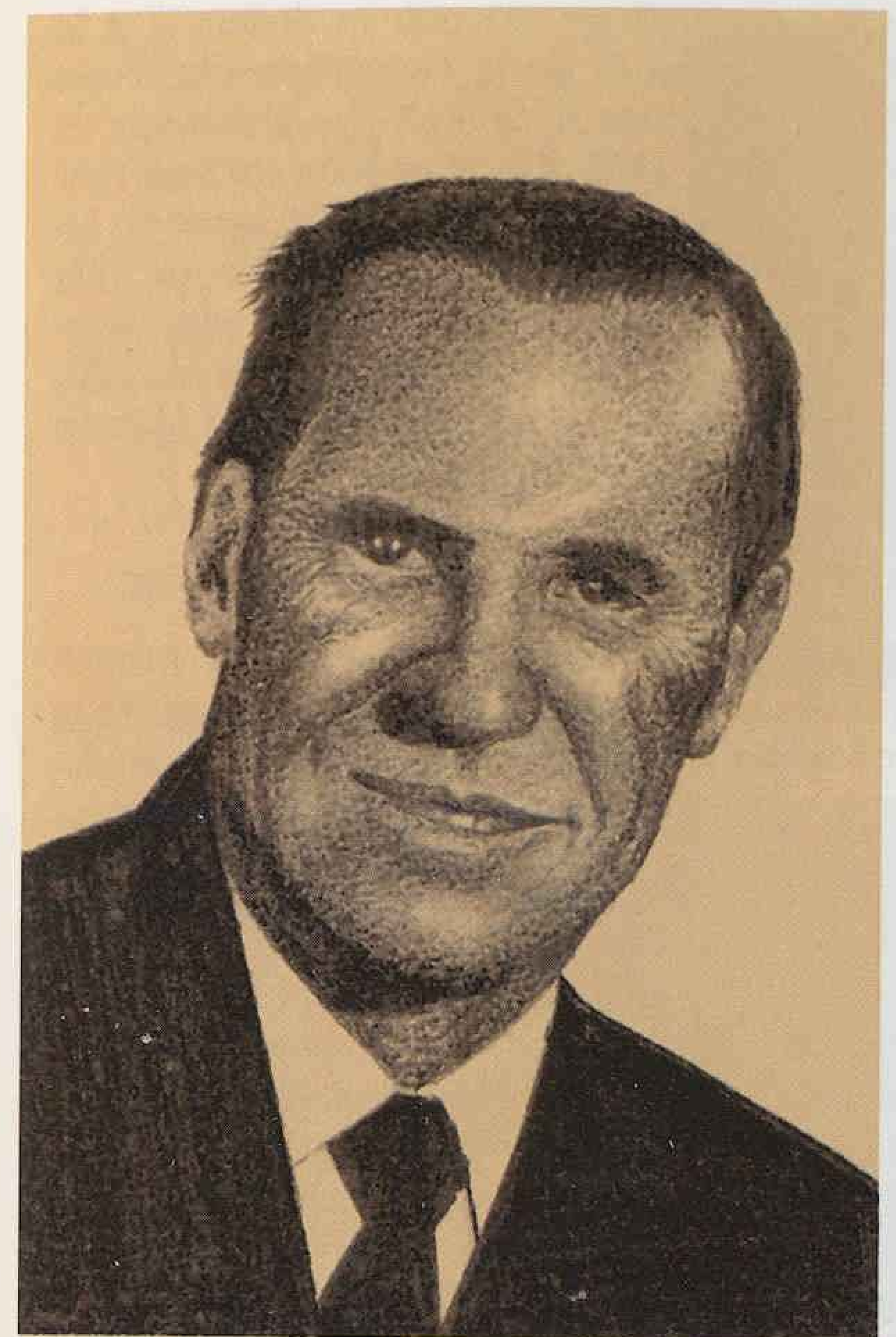


Fig. 1 – Jean Dieudonné, uno de los principales defensores de la sustitución de la geometría clásica por la geometría vectorial y analítica en la enseñanza elemental.

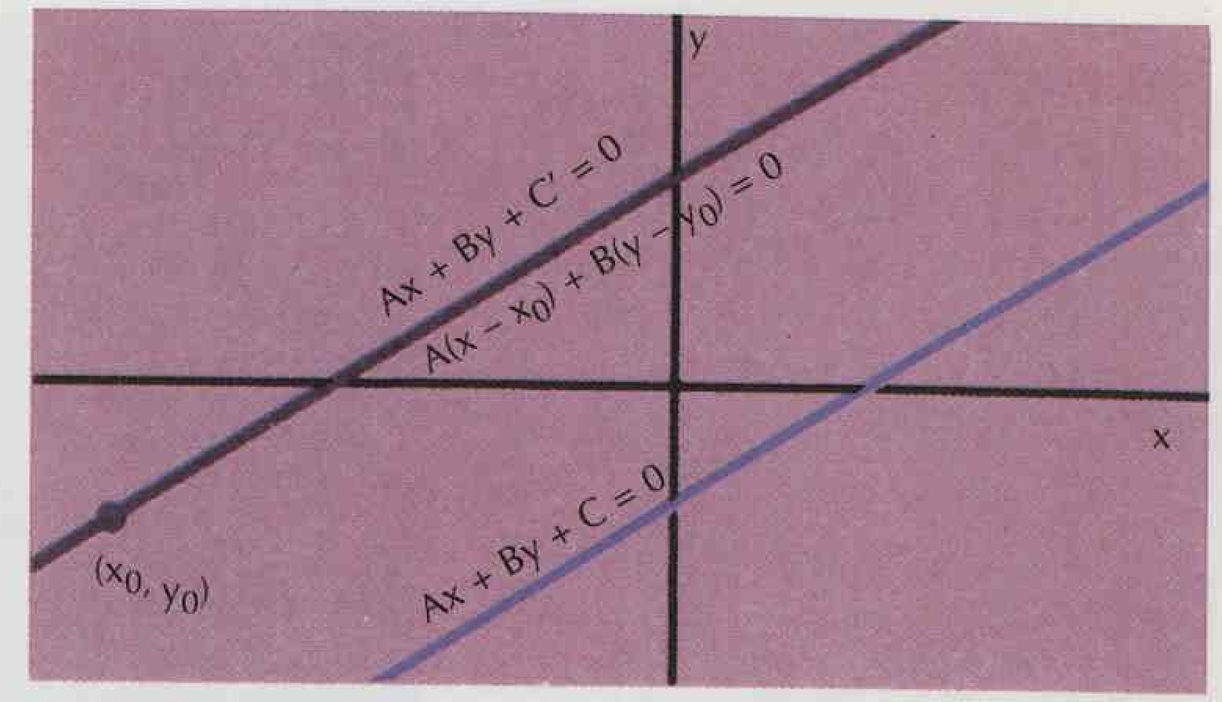


Fig. 2 – Recta paralela a una dada, que pasa por el punto (x_0, y_0).

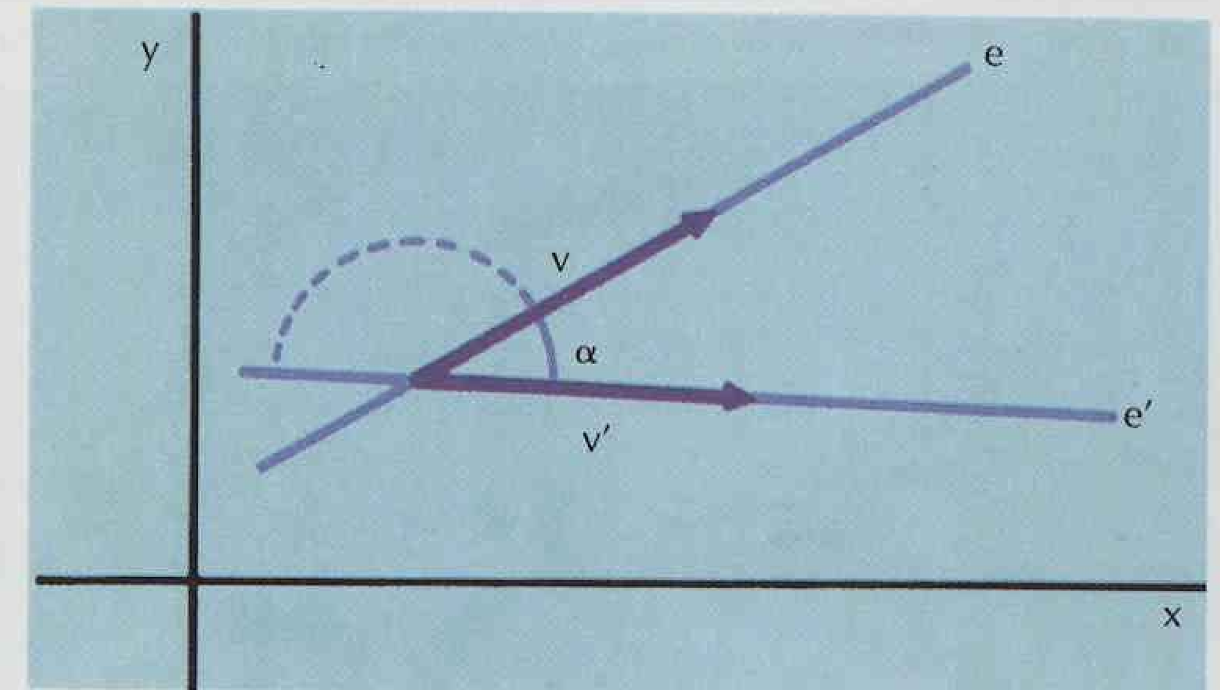


Fig. 3 – Ángulo que forman dos rectas cuyos vectores directores son v y v'.

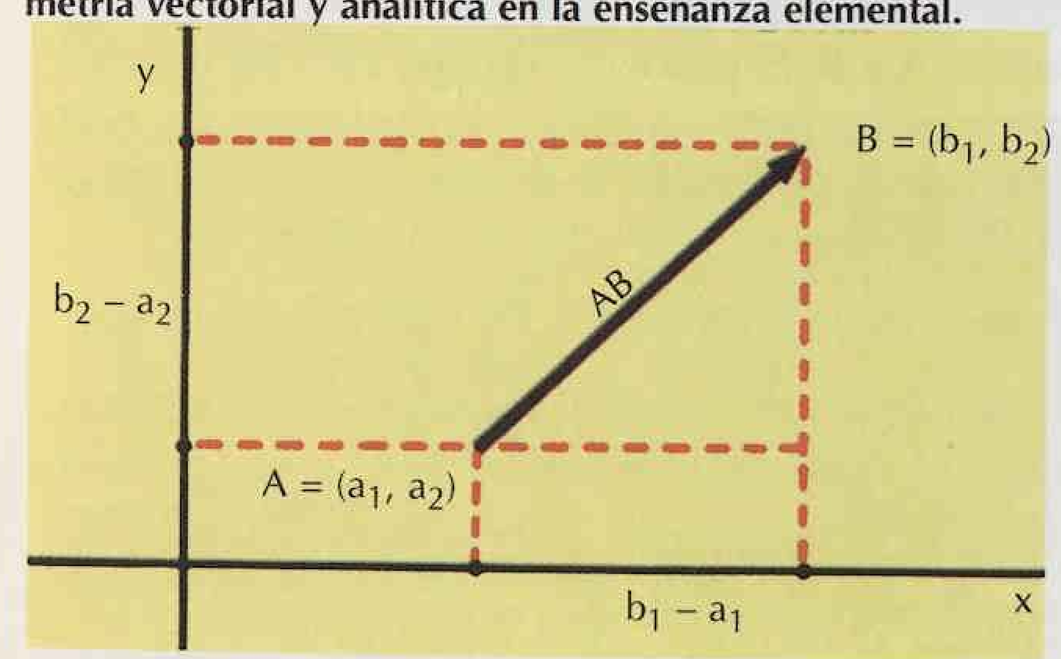


Fig. 4 – Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

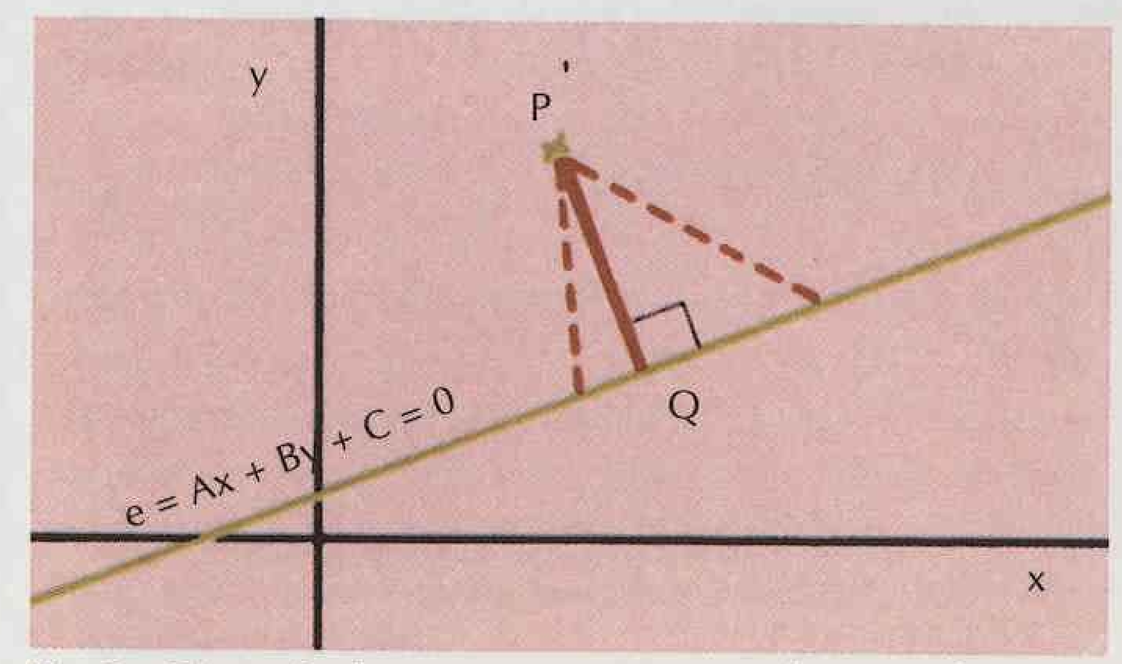


Fig. 5 – Distancia de un punto a una recta, d (P, e) = d(P, q).

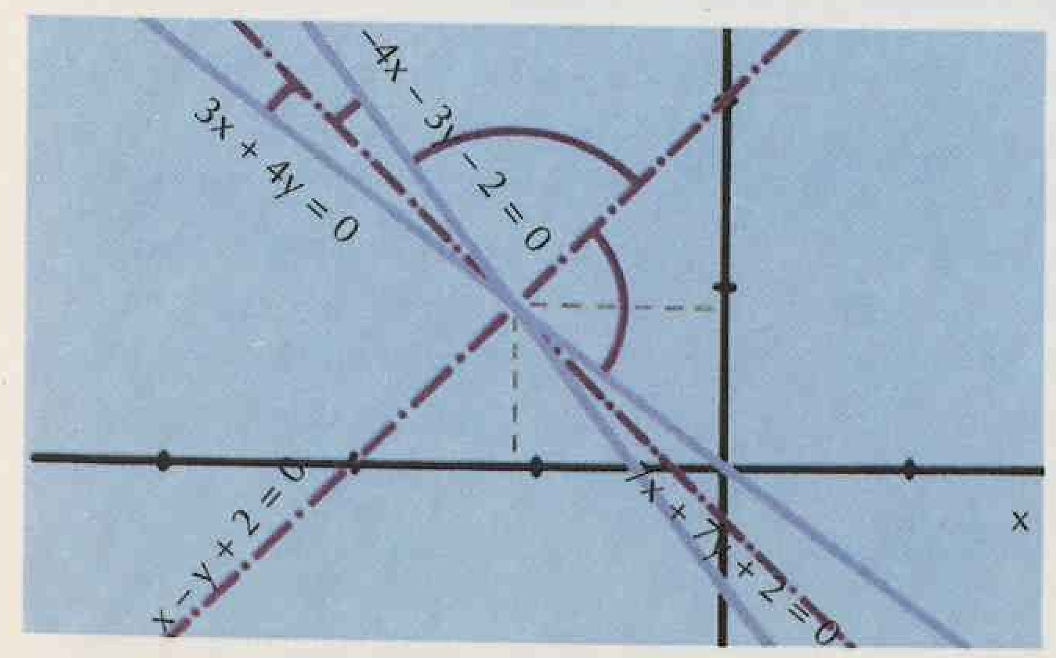


Fig. 6 – Bisectrices interna y externa de las rectas $3x + 4y = 0$ $y - 4x - 3y = 2$.

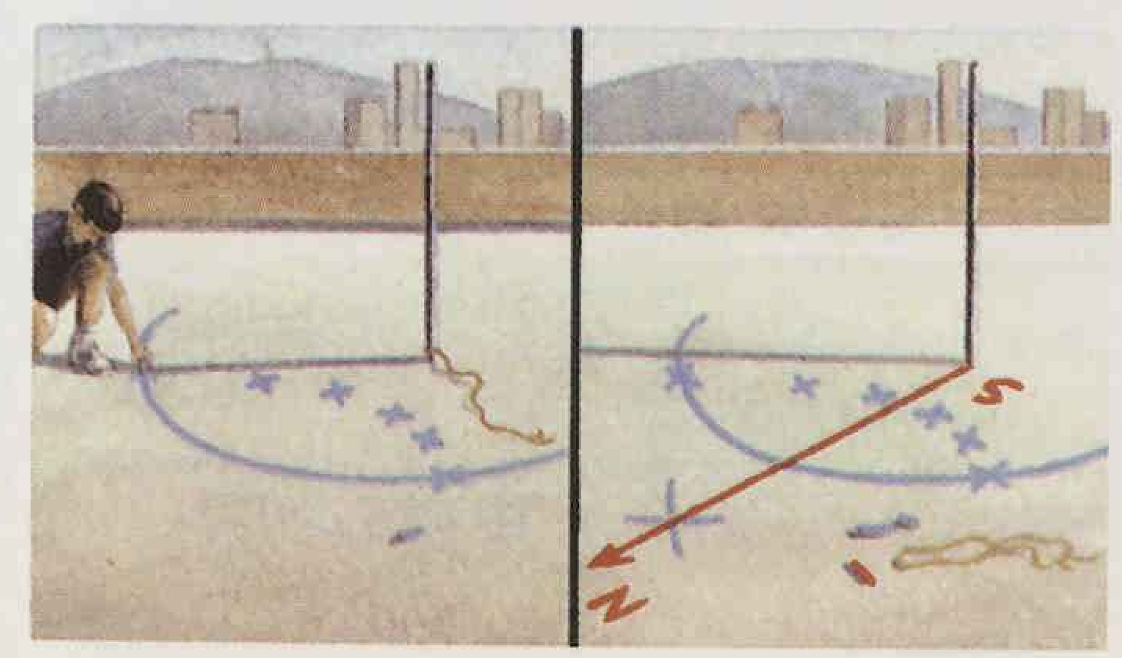


Fig. 7 – La bisectriz del ángulo formado por dos sombras iguales del palo da la dirección N-S.

LA CIRCUNFERENCIA

Definición

Dados un número real $r > 0$ y un punto del plano O, el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O vale r se llama *circunferencia*. El punto O se denomina *centro de la circunferencia* y r es su *radio*. Si $O = (a, b)$, la ecuación de la circunferencia (fig. 2) es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ o desarrollando,}$$
$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0,$$

donde $M = -2a$, $N = -2b$ y $P = a^2 + b^2 - r^2$; una ecuación de este tipo representa a una circunferencia real si y sólo si $r^2 = a^2 + b^2 - P > 0$.

La forma más sencilla de determinar la ecuación de una circunferencia se da cuando se conoce su centro y su radio. Cuando se dan tres puntos de la misma, se puede plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, M, N, y P.

• **Ejemplo.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, -2)$, $B = (-1, 6)$, y $C = (-4, 7)$. Determinar su centro y radio.

Si la ecuación de la circunferencia que pasa por A es $x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$, esta ecuación debe satisfacerse para $x = 1$ e $y = -2$, es decir se cumplirá que $M - 2N + P = 5$; procediendo análogamente para B y C, se tendrá el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} M - 2N + P &= 5 \\ -M + 6N + P &= -37 \\ -4M + 7N + P &= -65 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{cuya solución es } \left\{\begin{aligned} M &= 96/11 \\ N &= -20/11 \\ P &= -191/11 \end{aligned}\right.$$

por tanto la ecuación desarrollada de la circunferencia es $x^2 + y^2 + (96/11)x - (20/11)y + (-191/11) = 0$. Entonces las coordenadas del centro serán $a = -M/2 = -48/11$, $b = -N/2 = 10/11$ y el radio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - P} = \sqrt{4.505/121}$.

Posición relativa de una recta respecto a una circunferencia

Dadas una recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$ y la circunferencia c, de ecuación $x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$, los puntos de intersección de ambas son las soluciones (x, y) del sistema

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ x^2 + y^2 + Mx + Ny + P &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema puede no tener solución, y entonces se dice que la recta es *exterior* (ver figura 3); puede tener una solución, entonces r y c se cortan en un punto y se dice que la recta es una *tangente*; o pueden existir dos soluciones, entonces r y c se cortan en dos puntos y se dice que la recta es *secante* a la circunferencia.

Otra forma de determinar la posición relativa de r y c consiste en calcular la distancia a la recta del centro O de la circunferencia, cuyo radio denotaremos R. Si $d(O, r) < R$ la recta es una secante si $d(O, r) = R$ se trata de una tangente, y si $d(O, r)' > R$ es una recta exterior. En consecuencia, la distancia del centro de una circunferencia hasta cualquier recta tangente es igual al radio; además, la tangente y el radio correspondiente al punto de contacto forman un ángulo recto (ver B/9).

Posiciones relativas de dos circunferencias

Dadas dos circunferencias c y c', los puntos comunes se obtienen resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones respectivas

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + Mx + Ny + P &= 0 \\ x^2 + y^2 + M'x + N'y + P' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Según se tengan ninguna, una o dos soluciones, estas dos circunferencias serán *no incidentes*, *tangentes* o *secantes*. Si d es la distancia entre sus centros, y r y r' son los radios respectivos, se tiene que las circunferencias son *exteriores*, si $d \geq r + r'$, o *interiores* si $|r' - r| \leq d$ (ver figs. 4 y 5).

Potencia de un punto

Dado un punto P y una circunferencia c, toda recta secante a c que pase por P la corta en dos puntos A y B. El producto escalar **PA · PB** tiene el mismo valor para cualquier recta secante a c que pase por P. Este valor se conoce como potencia de P respecto a c y se simboliza $pot_c(P)$,

$$pot_c(P) = \mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB} = \mathbf{PT} \cdot \mathbf{PT} = [\mathbf{PT}]^2 \text{ (figura 6).}$$

Si d es la distancia de P al centro de la circunferencia c, se cumple $pot_c(P) = d^2 - r^2$. Dada la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ y el punto $P = (x_0, y_0)$, se tiene que la potencia se puede expresar como $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$.

Eje radical y centro radical

Se llama *eje radical* de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto a ambas circunferencias. Este eje es una recta que se obtiene igualando las ecuaciones con coeficiente 1 de x^2 de las circunferencias (si son concéntricas el eje radical no existe) y es perpendicular a la línea que une los dos centros (figura 7).

El *centro radical* de tres circunferencias es el punto del plano que tiene igual potencia respecto a las tres circunferencias. El centro radical es el punto de intersección de los tres ejes radicales determinados por las tres circunferencias.

Fig. 1 – El cálculo de órbitas realizado por Newton, la geometría de una órbita sincrónica y esta antena circular son una aproximación al concepto abstracto de la circunferencia.

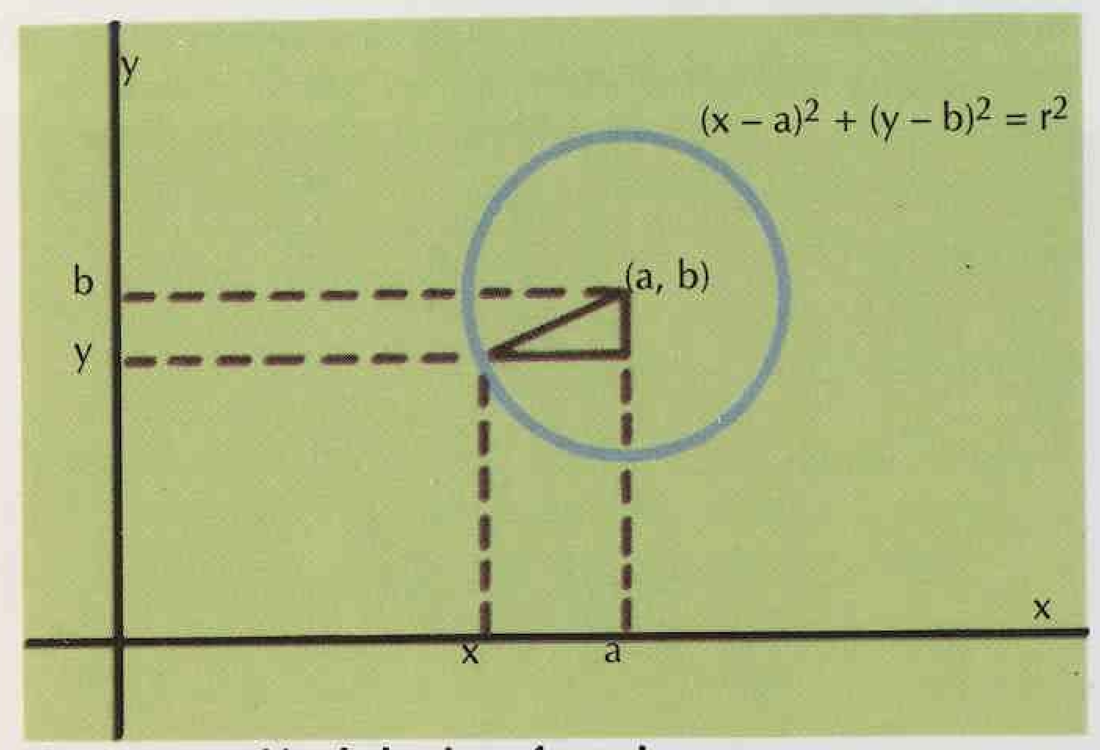


Fig. 2 – Ecuación de la circunferencia.

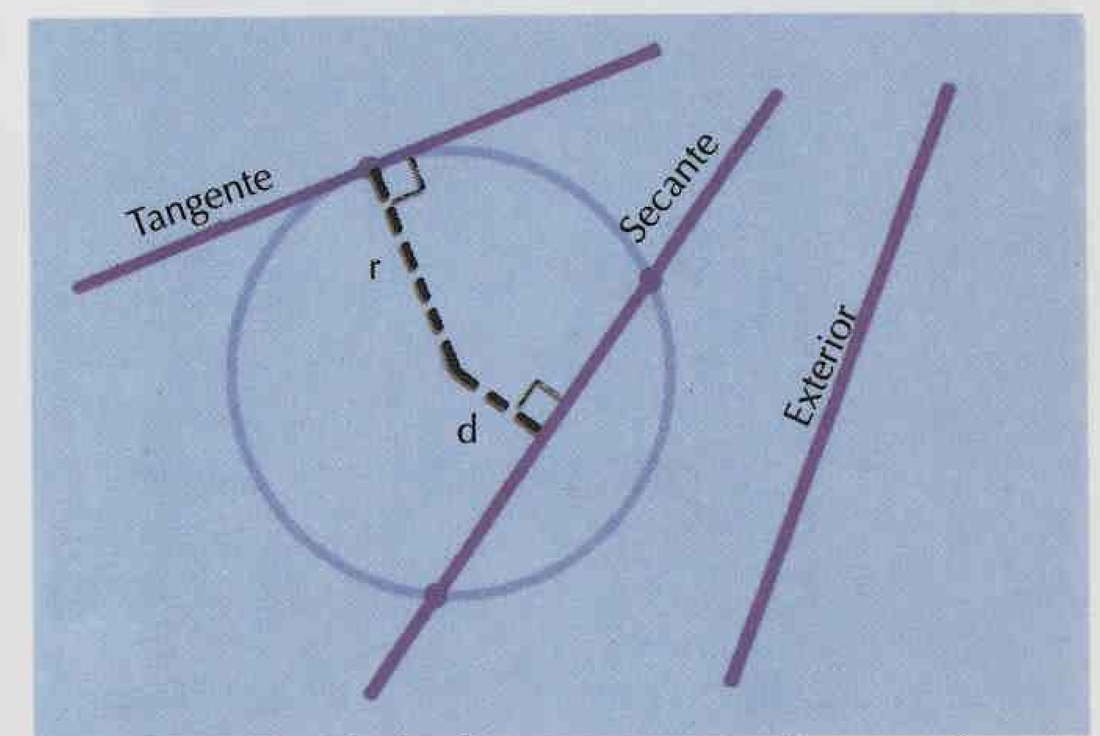


Fig. 3 – Posición relativa de una recta respecto a una circunferencia.

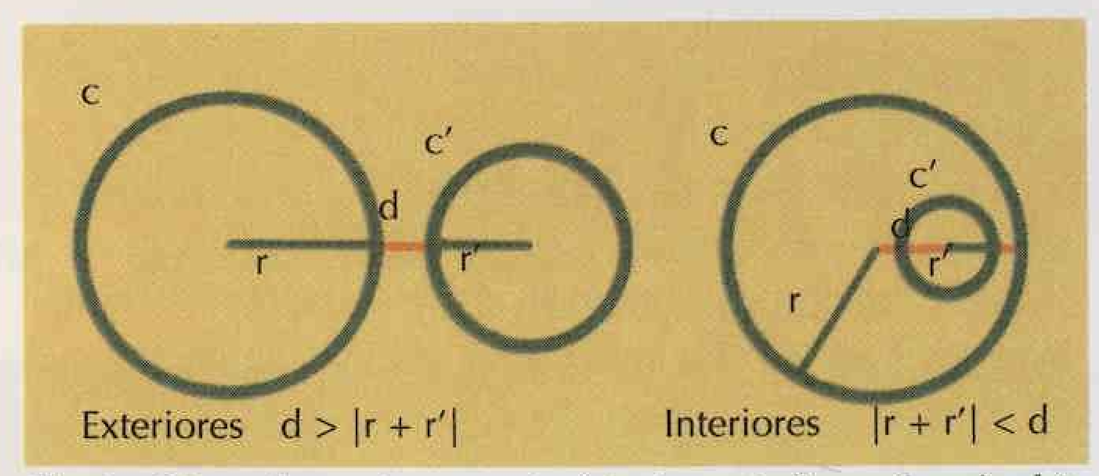


Fig. 4 – Circunferencias no coincidentes exteriores (izquierda) e interiores (derecha).

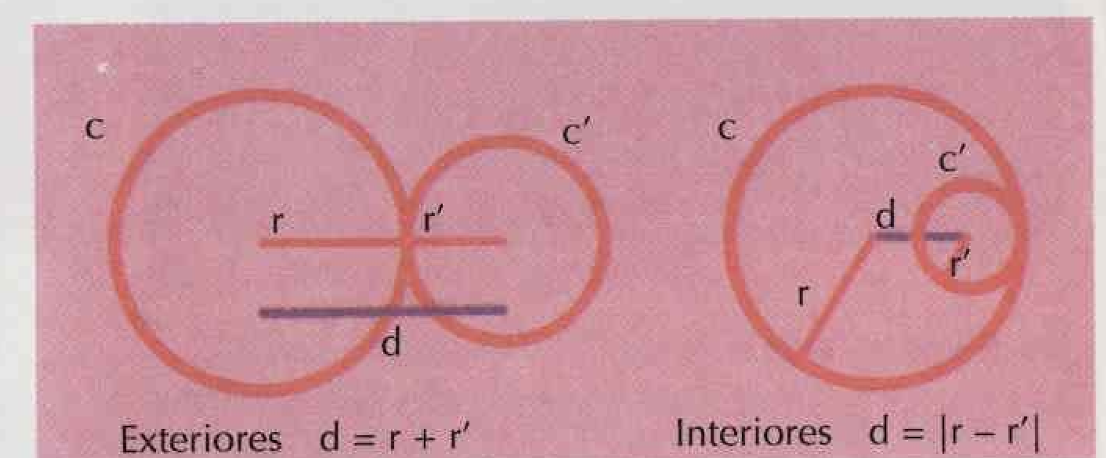


Fig. 5 – Circunferencias tangentes exteriores (izquierda) e interiores (derecha).

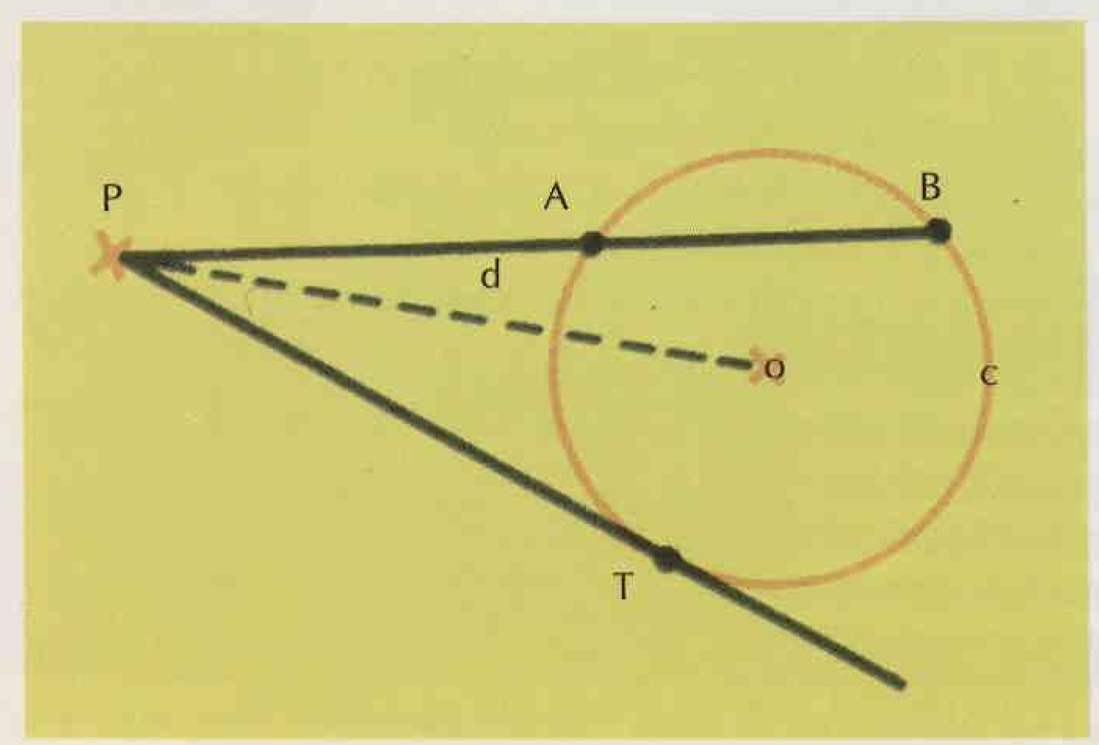


Fig. 6 – Potencia de un punto respecto a una circunferencia.

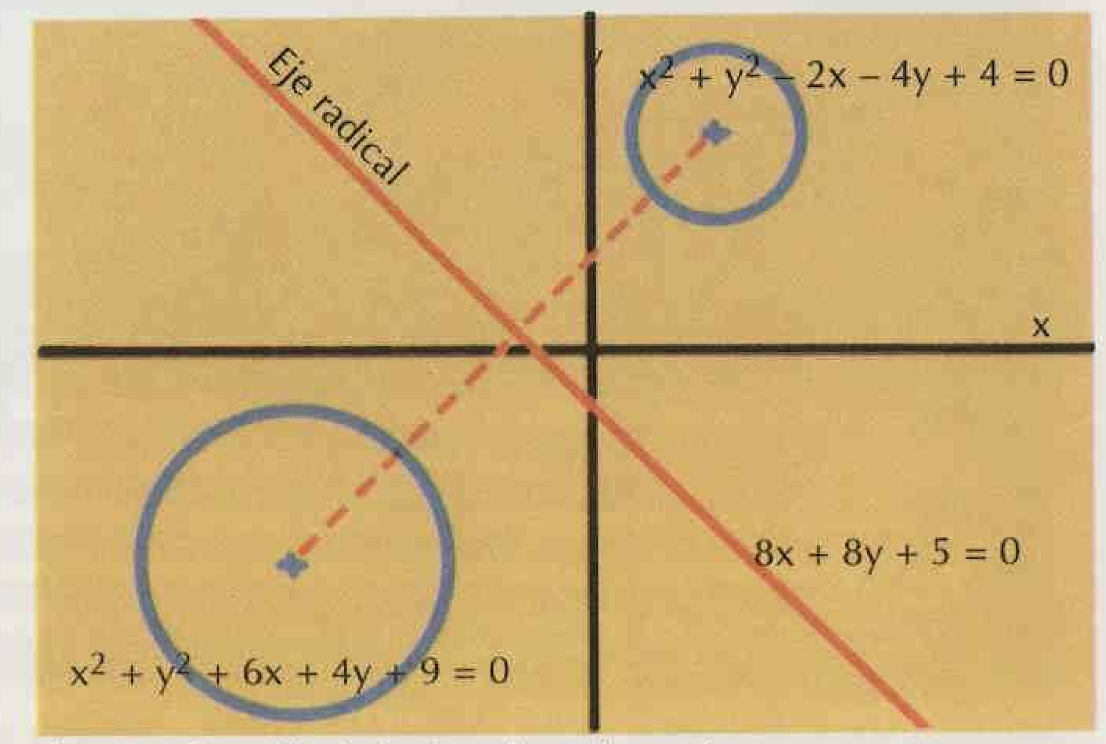


Fig. 7 – Eje radical de dos circunferencias.

CÓNICAS

La elipse

Definiciones. Dados dos puntos F y F', y una longitud $2a$, se llama *elipse de focos* F y F' al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es $2a$. Así, si P es un punto de la elipse, debe cumplir $d(P, F) + d(P, F') = 2a$. Se llaman *radios vectores* de P a PF y PF'.

La elipse es simétrica respecto a FF' y a la mediatriz del mismo, así como al punto de intersección de ambos (*centro de la elipse*).

— Los puntos intersección de la curva con sus ejes se llaman *vértices* (A, A', B, B' en la figura 1).

— AA' se llama *eje mayor* y su longitud es $2a$. BB' se llama *eje menor* y su longitud se designa por $2b$.

— La distancia FF' se designa por $2c$ y se llama *distancia focal*.

— Los números a, b, c son reales y positivos, y se cumple $a^2 = b^2 + c^2$.

— El cociente c/a recibe el nombre de *excentricidad* y se designa por e. Este número está siempre comprendido entre 0 y 1. La excentricidad mide el grado de *achatamiento* de la elipse. Así, en los casos extremos, si $e = 0$ la elipse es una circunferencia, y si $e = 1$ es el segmento AA'.

— Se llaman *circunferencias directrices* las que tienen centro en un foco y radio $2a$.

Ecuación de la elipse. Tomando un sistema de referencia, con el eje X sobre la recta AA' y el eje Y sobre BB', los puntos de la elipse $P(x, y)$ son los que cumplen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

llamada *ecuación canónica de la elipse*.

Tangente a la elipse en uno de sus puntos. Sea $P(x', y')$ un punto de la elipse (1); entonces la ecuación de la tangente en dicho punto viene dada por

$$\frac{x'\,x}{a^2} + \frac{y'\,y}{b^2} = 1$$

Tangente por un punto exterior. Si $P(x, y)$ es exterior, para hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva que pasan por P, debe plantearse el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y - y' &= m \cdot (x - x') \end{aligned}\right\}$$

Luego se procede a resolverlo por sustitución, con lo que se llega a una ecuación de segundo grado, cuyo discriminante debe ser cero, ya que la curva y la recta se tocan en un solo punto.

• **Ejemplo.** Hallemos las tangentes a la elipse $(x^2/4) + y^2 = 1$ que pasan por el punto $P(3, 0)$.

Sea $y = m\,(x - 3)$ una de las tangentes. Sus intersecciones con la elipse vienen dadas por

$$\left.\begin{aligned} (a)\quad & \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ (b)\quad & y = m \cdot (x - 3) \end{aligned}\right\}$$

Despejando y de (b) y sustituyendo en (a), se tiene $(1 + 4m^2)x^2 - 24m^2x + 36m^2 - 4 = 0$, cuyo discriminante debe ser cero. De aquí resulta que $m = \pm\, 1/\sqrt{5}$, luego las tangentes serán

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(x - 3)\,,\ y = -\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,(x - 3).$$

Normal a la elipse en un punto. La recta *normal* a la elipse en un punto P es la recta que pasa por P y es perpendicular a la tangente en dicho punto.

Propiedad de la tangente. La tangente y la normal en un punto son las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores de ese punto (fig. 4).

La hipérbola

Definiciones. Dados dos puntos F y F', y una longitud $2a$, se llama *hipérbola de focos* F y F' al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a los focos es $2a$. Así, siendo P un punto de la hipérbola, debe cumplirse $|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$. PF y PF' se llaman *radios vectores* de P.

La hipérbola es simétrica respecto a FF' y a la mediatriz del mismo, así como al punto de intersección de ambos segmentos (*centro*).

— Los puntos intersección de FF' y con la curva se llaman *vértices* (A y A' en la figura 2).

— AA' se llama *eje real de la hipérbola*, y su longitud es $2a$. La mediatriz de dicho segmento recibe el nombre de *eje imaginario*, y no corta a la curva.

— La distancia FF' se desiga por $2c$ y se llama *distancia focal*.

— El número $c^2 - a^2$ se designa por b^2. A b se le llama *semieje imaginario*.

— Los números a, b, c son, pues, reales y positivos, y cumplen $c^2 = a^2 + b^2$.

— La *excentricidad* y las *circunferencias directrices* se definen igual que en la elipse; pero, en el caso de la hipérbola, la excentricidad es siempre mayor que 1.

Ecuación de la hipérbola. Si se toma un sistema de referencia de tal forma que el eje X se halle sobre el eje real y el eje Y sobre el imaginario, todo punto $P(x, y)$ de la curva cumple

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2),$$

llamada *ecuación canónica de la hipérbola*.

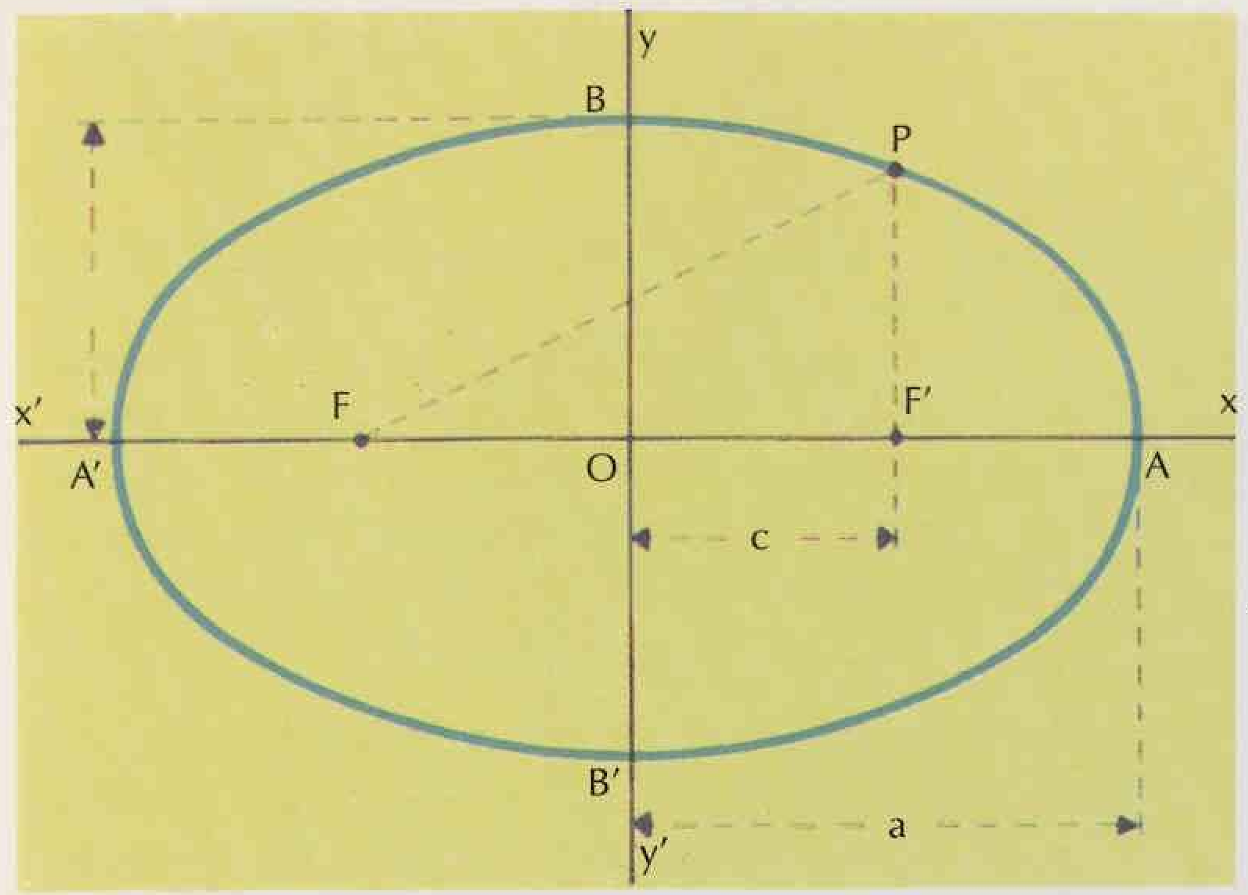


Fig. 1 – Elementos de la elipse.

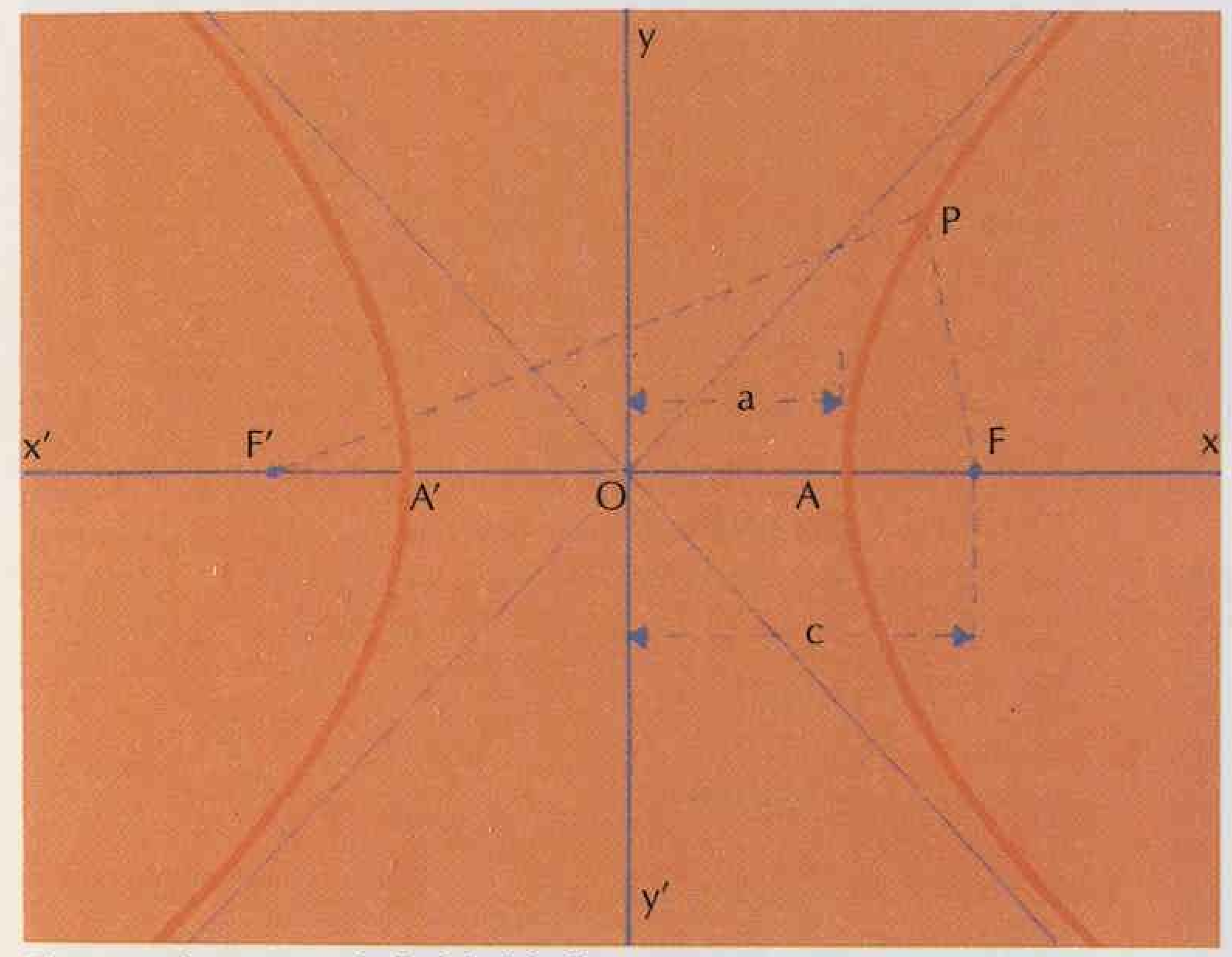


Fig. 2 – Elementos de la hipérbola.

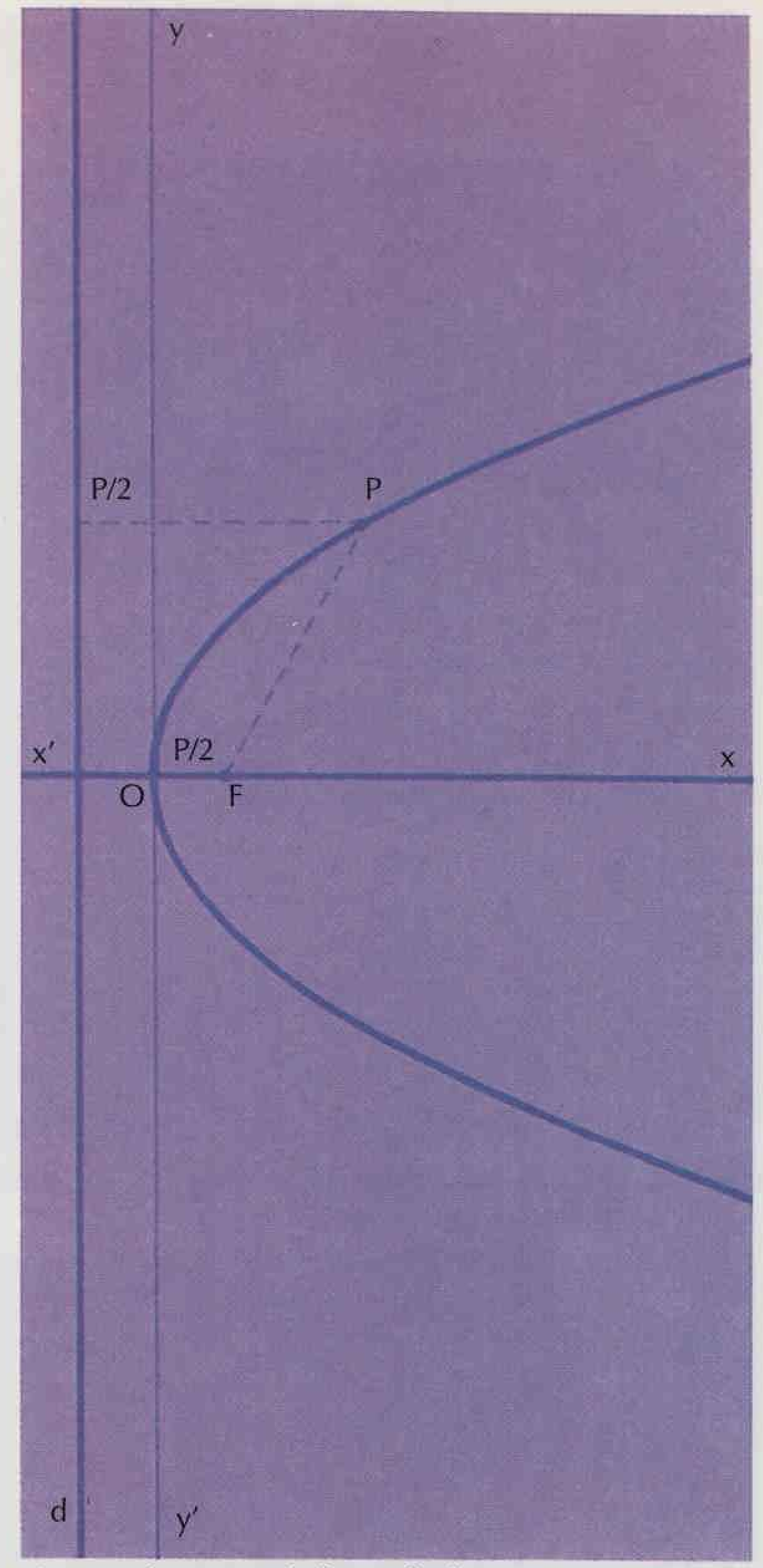


Fig. 3 – Elementos de la parábola.

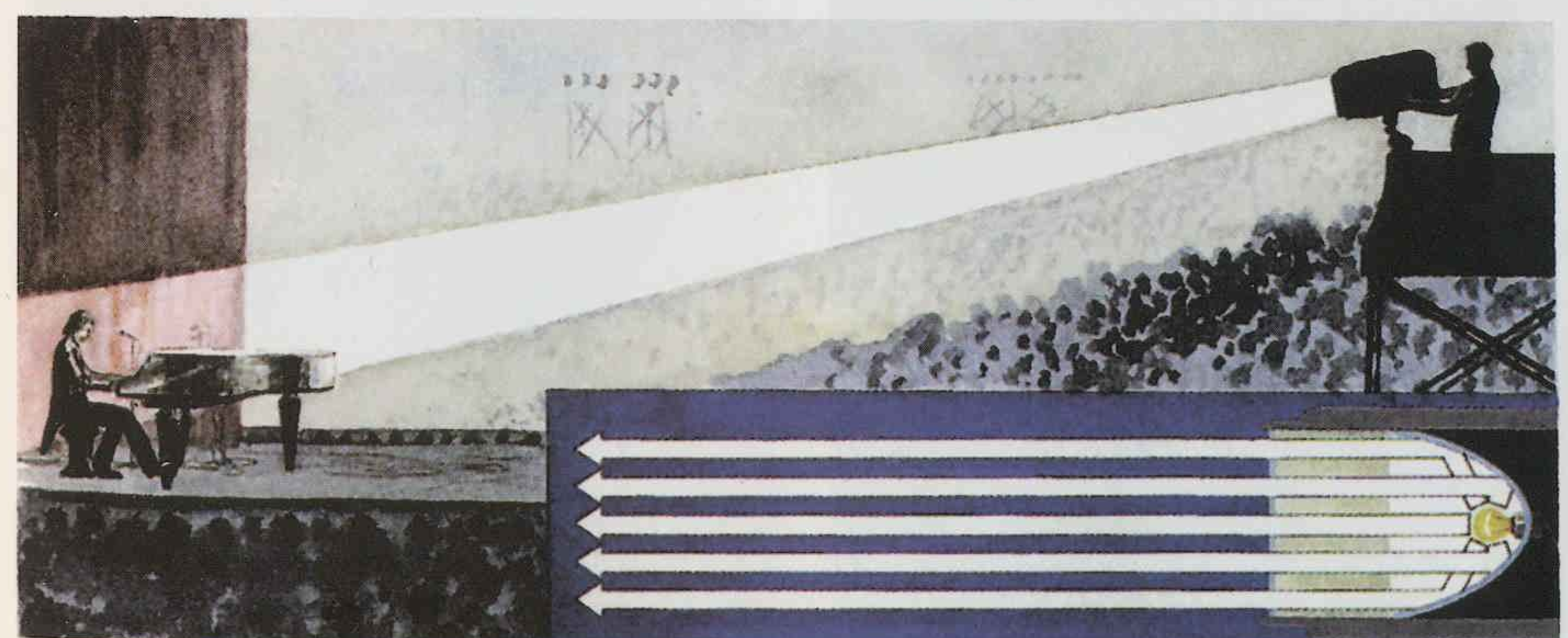


Fig. 4 – Los rayos luminosos emitidos desde el foco de una parábola se reflejarían paralelamente al eje. Esta propiedad puede utilizarse para construir focos con espejo parabólico, que porcionan un haz de rayos luminosos paralelos.

Tangente a la hipérbola en uno de sus puntos. Sea $P(x', y')$ un punto de la hipérbola (2); entonces la ecuación de la tangente en dicho punto viene dada por

$$\frac{x' \cdot x}{a^2} - \frac{y' \cdot y}{b^2} = 1.$$

Tangente por un punto exterior. Si P es exterior, para hallar las ecuaciones de las tangentes por P a la hipérbola se procede como en el caso de la elipse.

Propiedad de la tangente. La *normal* en un punto se define igual que en el caso de la elipse.

La tangente y la normal en un punto de la curva son las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores en dicho punto.

Asíntotas de la hipérbola. Sea la hipérbola de ecuación (2); se llaman *asíntotas* de la misma a las rectas de ecuaciones

$$y = -\frac{b}{a}x \ , \ y = \frac{b}{a}x,$$

rectas que se pueden describir como tangentes a la hipérbola «en el infinito».

Hipérbolas equiláteras. Si se cumple $a = b$, la hipérbola se llama equilátera: su ecuación es de la forma $x^2 - y^2 = a^2$, su excentricidad es $e = \sqrt{2}$, y sus asíntotas $y = \pm x$.

Si se toman como ejes de coordenadas las asíntotas de una hipérbole equilátera, su ecuación es de la forma $x \cdot y = k$, donde $k = a^2/2$.

La parábola

Definiciones. Dados un punto F y una recta d, se llama *parábola de foco F* y *directriz d* al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de F y de d. Así, siendo P un punto de la parábola, se cumple $d(P, F) = d(P, d)$. PF y PP' (fig. 3 de C/6) se llaman *radios vectores de P*.

La parábola es simétrica respecto a la perpendicular por el foco a la directriz, que se llama *eje de la parábola*.

— La intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

— La distancia p del foco a la directriz se llama *parámetro*.

Ecuación de la parábola. Tomando un sistema de referencia, con eje X sobre el eje de la parábola y eje Y perpendicular a éste por el vértice, los puntos $P(x, y)$ de la parábola son los que cumplen la ecuación

$$y^2 = 2px \qquad (3),$$

llamada *ecuación canónica* de la parábola.

Conviene saber que toda ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (4) es una parábola de eje paralelo al eje Y, cuyo vértice es

$$A\left[\frac{-b}{2a}, \ c - \frac{b^2}{4a}\right]$$

Tangentes a una parábola. Si $P(x', y')$ es un punto de la parábola (3), la ecuación de la tangente a la parábola por P es $y' \cdot y = p(x + x')$.

Si P es un punto exterior, para hallar las tangentes a la parábola por P se procede como en el caso de la elipse.

Propiedad de la tangente. La *normal* se define igual que en la elipse.

La tangente a la parábola en un punto es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores en dicho punto.

Secciones cónicas

El nombre común de cónicas que se da a la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola se debe a que todas ellas pueden obtenerse como secciones producidas por un plano en una superficie cónica de revolución. En la figura adjunta se ven las diferentes secciones, en función del ángulo φ, formado por el plano secante y el eje del cono (figs. 1, 2 y 3).

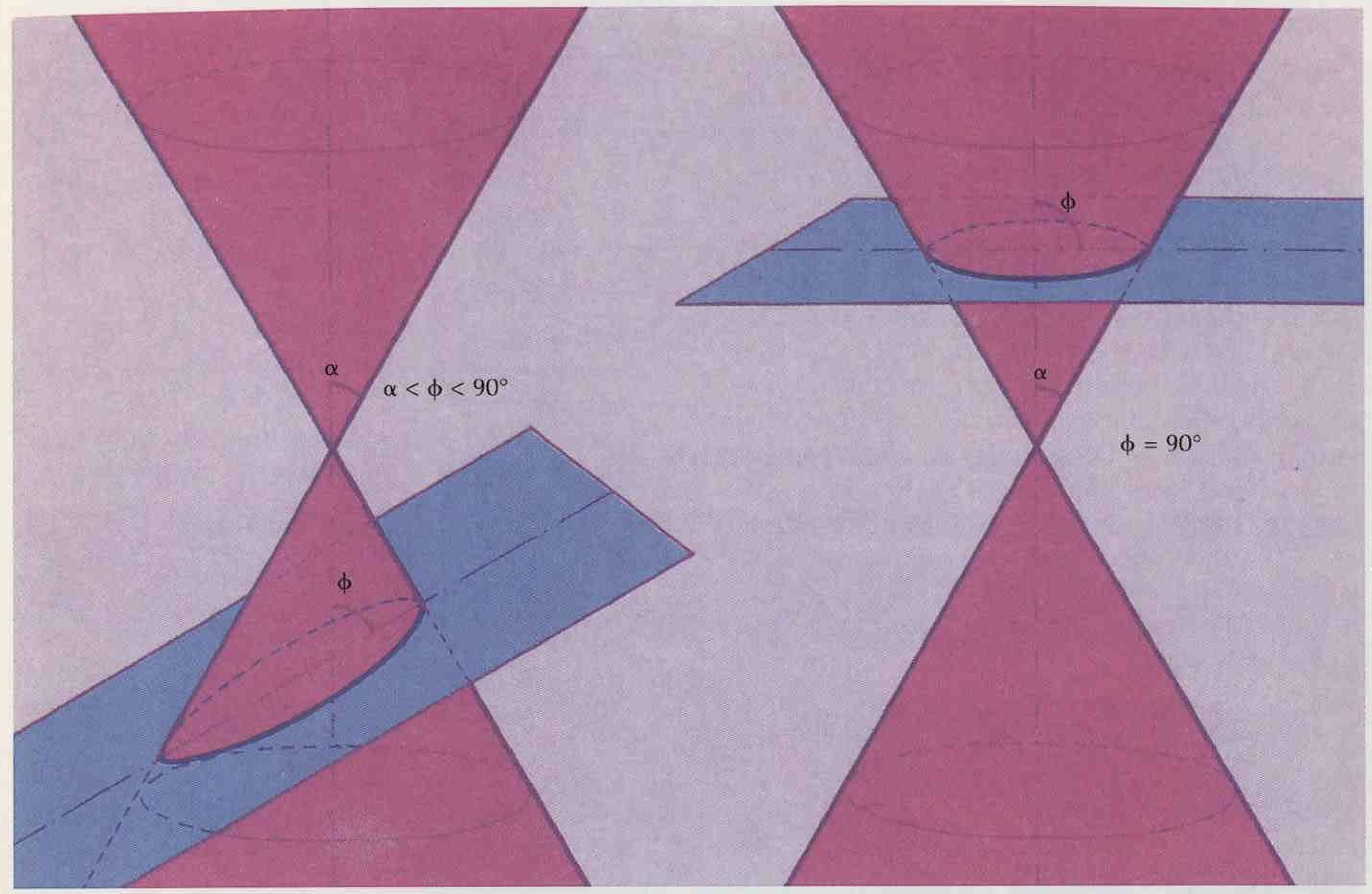


Fig. 1 – La sección de un cono de revolución por un plano que corte a todas las generatrices del mismo lado del vértice es una elipse (izquierda) o una circunferencia (derecha).

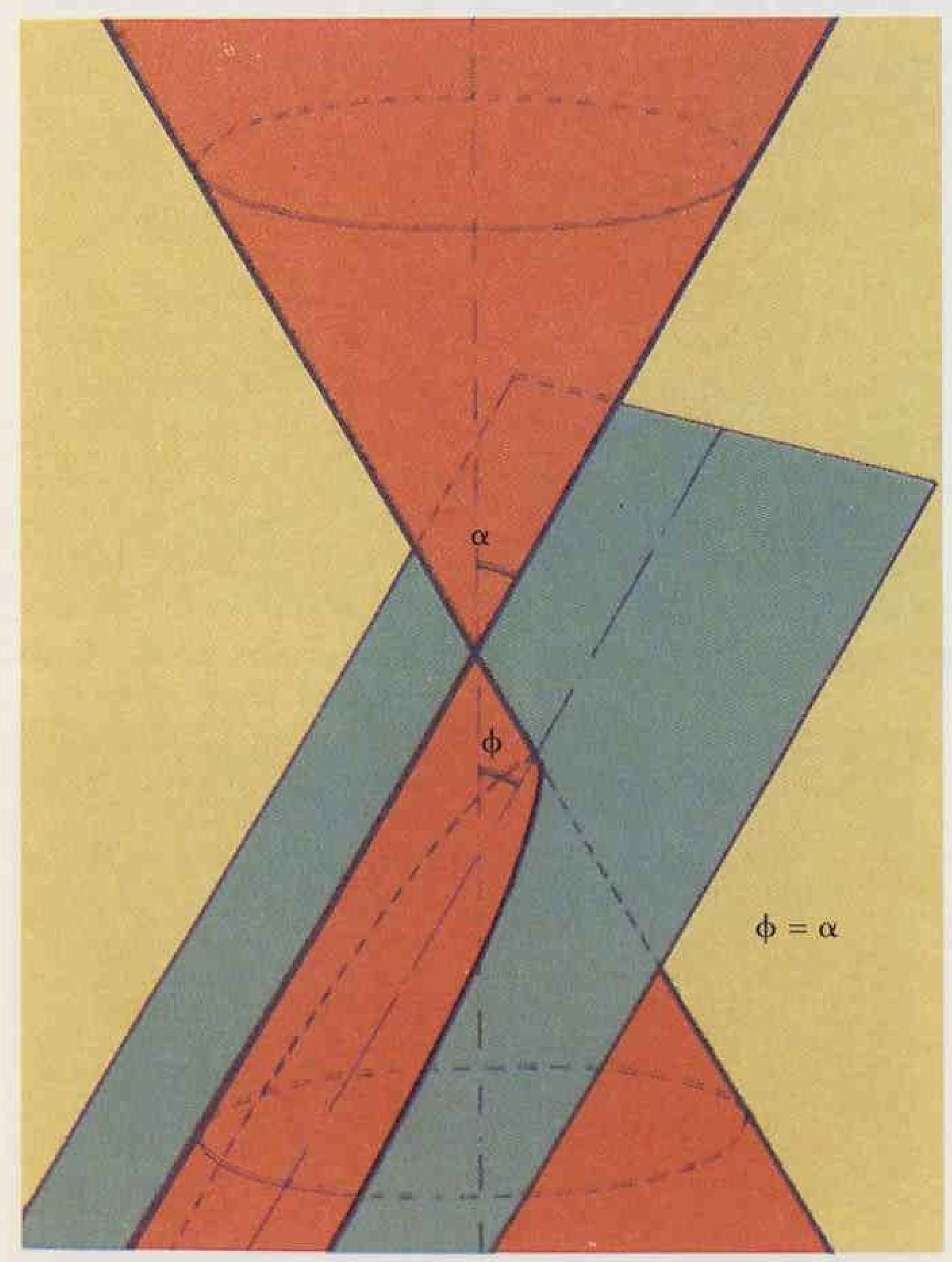


Fig. 2 – La sección producida por un plano paralelo a una de las generatrices es una parábola.

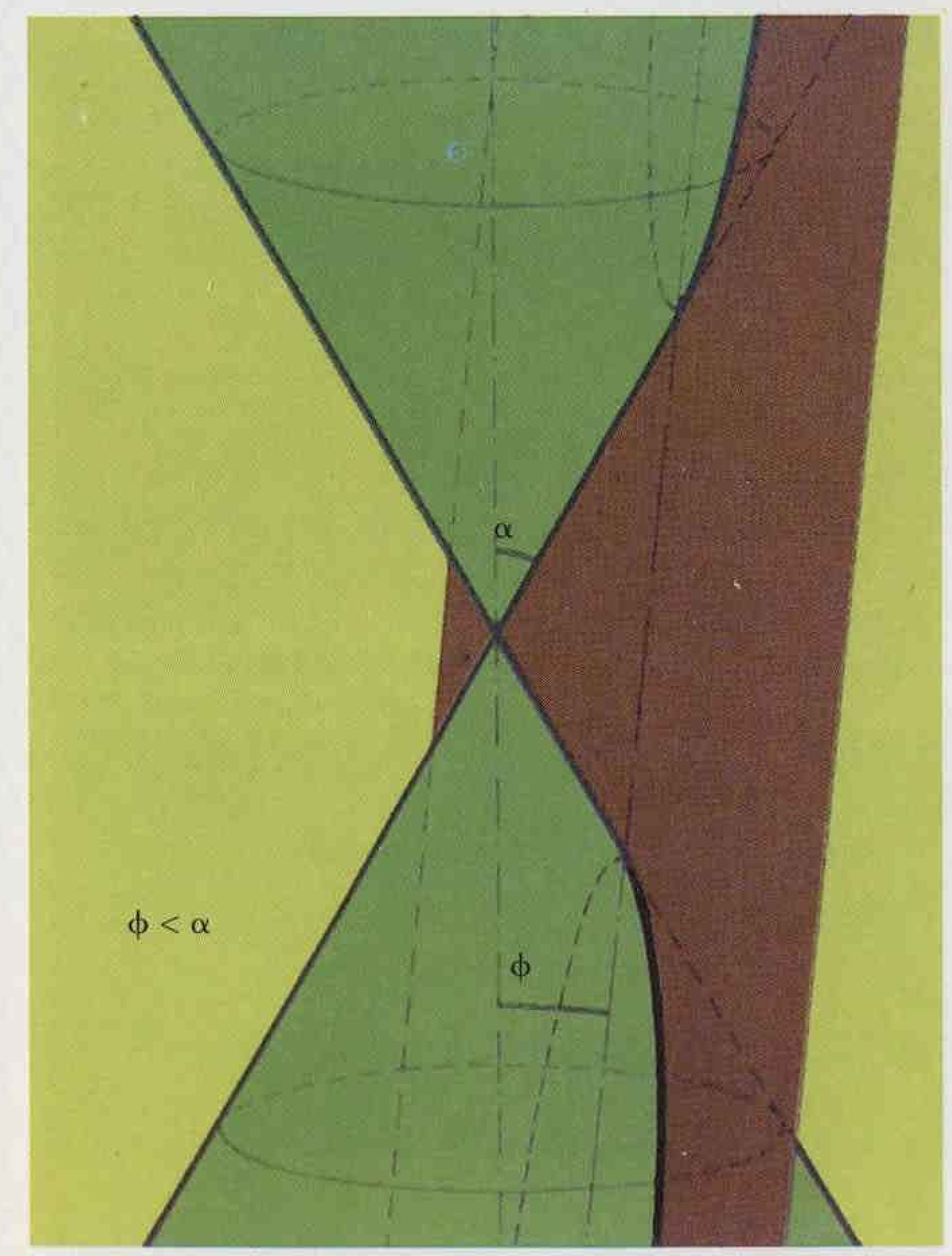


Fig. 3 – La sección producida por un plano que corte a todas las generatrices pero no en el mismo lado del vértice, es una hipérbola.

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

Coordenadas de un punto en el espacio

Dado un punto $O \in \mathbf{R}^3$ y una base del espacio vectorial de los vectores libres sobre $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in V_3$, dichos puntos y base constituyen un *sistema de coordenadas del espacio* en cuestión. El punto O se denomina *origen de coordenadas* del sistema. Las *componentes* de un punto cualquiera del espacio, A, en este sistema son, por definición, las componentes del vector **OP** en la base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (ver C/2). Las rectas que pasan por el origen de coordenadas y que siguen las direcciones de los tres vectores que forman la base se llaman *ejes de coordenadas*. Al igual que en el plano (ver C/3), fijado un sistema de coordenadas con origen en O y dado un vector libre **AB**, se tiene que **AB** = **OB** – **OA**, que simbólicamente se escribe **AB** = $B - A$, donde B son las coordenadas del extremo y A las de origen (figura 1).

Cuando los vectores son perpendiculares entre sí y de longitud unidad, se dice que el sistema es *cartesiano* y los *tres ejes* de coordenadas se denominan, habitualmente X, Y y Z. En lo sucesivo todos los sistemas que usaremos de coordenadas en tres dimensiones, coordenadas espaciales, serán de este tipo.

Ecuaciones de la recta y del plano

Ecuaciones de la recta. Dado un punto $P_0 \in \mathbf{R}^3$ y un vector libre $\mathbf{v} \in V_3$, no nulo, el conjunto de todos los puntos P del espacio que son de la forma

$$P = P_0 + r\mathbf{v}, \text{ con } r \in \mathbf{R} \qquad \text{(figura 3)}$$

forman una recta. Esta *ecuación vectorial* puede escribirse en componentes

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r\,(a, b, c)$$

donde (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de P y P_0, respectivamente y (a, b, c) las componentes del *vector director* $\mathbf{v}$. De esta ecuación se derivan las *ecuaciones paramétricas*

$$x - x_0 = ra;\ y - y_0 = rb;\ z - z_0 = rc,$$

despejando el parámetro r de este sistema, se tiene la *ecuación continua* de la recta

$$(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c.$$

Puesto que el vector director puede venir dado por dos puntos no coincidentes de la recta $\mathbf{v} = \mathbf{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, estas ecuaciones suelen escribirse como

$$\frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y - y_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} \qquad \text{(figura 3).}$$

Tres puntos están alineados si sus coordenadas verifican estas ecuaciones.

Ecuaciones del plano. Dado un punto $P_0 \in \mathbf{R}^3$ y dos vectores libres de V_3, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}'$, linealmente independientes, el conjunto de puntos $\mathbf{R}^3$ de la forma

$$P = P_0 + r\mathbf{u} + s\mathbf{u}' \qquad \text{(figura 4)}$$

forman un plano del espacio. Tomando componentes en esta *ecuación vectorial* se tiene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r\,(a, b, c) + s(a', b', c')$$

donde las componentes tienen el mismo significado que en el apartado anterior, y r y $s \in \mathbf{R}^3$. El sistema de *ecuaciones paramétricas* del plano viene dado por

$$\left.\begin{aligned} x_0 - x + ra + sa' &= 0 \\ y_0 - y + rb + sb' &= 0 \\ z_0 - z + rc + sc' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Despejando r y s de este sistema, se obtiene la *ecuación general o cartesiana* de un plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Consecuencia. Dados dos planos distintos $Ax + By + Cz + D = 0$ y $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, si el sistema formado por estas dos ecuaciones tiene solución, entonces el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^3$ que satisfacen el sistema es una recta. Estas dos ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones implícitas* de una recta en el espacio. De hecho, a partir de las ecuaciones continuas pueden construirse unas ecuaciones implícitas,

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + p \\ y &= nz + q \end{aligned}\right\}$$

que en este caso son llamadas *ecuaciones en forma reducida.*

Producto escalar y ángulo de dos vectores

Dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, vectores libres del espacio, si sus componentes en un sistema de coordenadas cartesianas son (a, b, c) y (a', b', c'), respectivamente, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\alpha = aa' + bb' + cc',$$

donde α es el menor de los ángulos que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (ver C/2). Como $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a^2 + b^2 + c^2$, se tendrá (fig. 5).

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Consecuencia. Dado un vector libre cualquiera del espacio $\mathbf{u} = (a, b, c)$, un vector unitario derivado de éste vendrá dado por $\mathbf{s} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$,

$$\mathbf{s} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

Las componentes de $\mathbf{s}$ se denominan *cosenos directores* de vector $\mathbf{s}$, o del vector $\mathbf{u}$. Si son conocidos, se puede determinar fácilmente la dirección de $\mathbf{u}$ en el espacio. Escribiendo $\mathbf{s} = (\cos\alpha\ ,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, se tiene que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (figura 6).

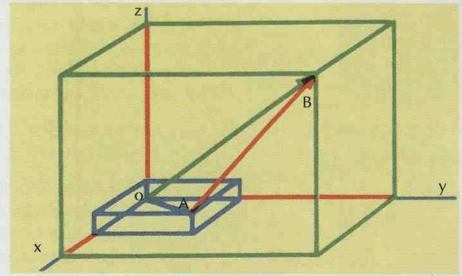


Fig. 1 – Componentes (en rojo) del vector AB = OB – OA en un sistema cartesiano tridimensional.

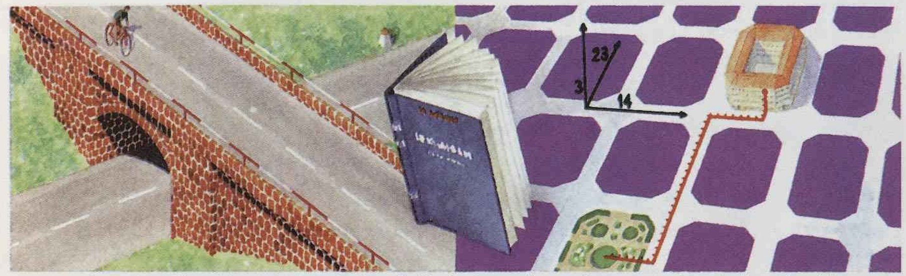


Fig. 2 – Las hojas de un libro abierto son ejemplo de *radiación* de planos, el cruce de carreteras, lo es de distancia mínima entre rectas que *se cruzan.* Localizar un piso exige *tres* coordenadas.

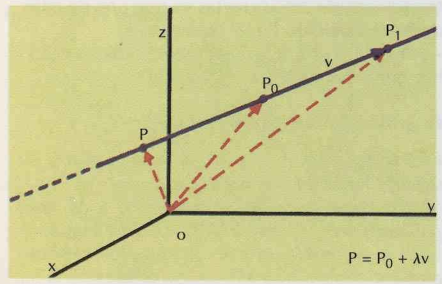


Fig. 3 – Recta en el espacio determinada por un vector director y un punto, o por dos puntos.

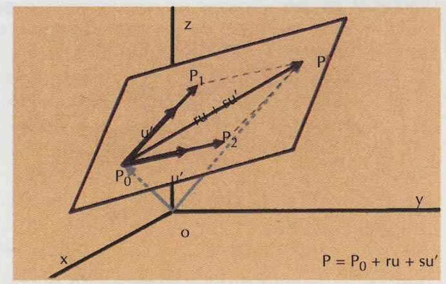


Fig. 4 – Plano determinado por un punto y dos vectores directores, o por tres puntos.

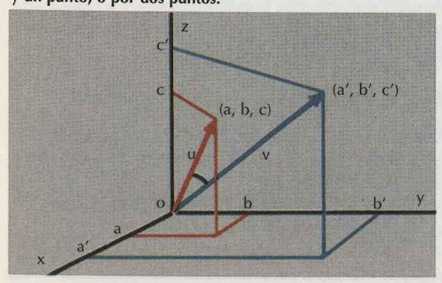


Fig. 5 – Ángulo de dos vectores en el espacio.

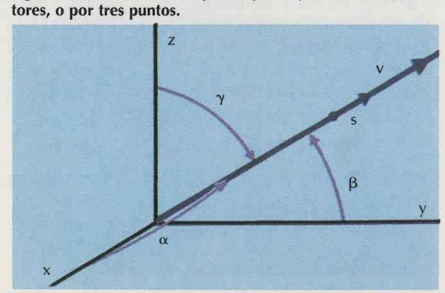


Fig. 6 – Determinación de una dirección en el espacio por los ángulos definidos a partir de los cosenos directores de un vector u.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Definición

Dados dos vectores **u** y **v** de V_3, cuyas componentes en un sistema cartesiano son respectivamente (a, b, c) y (a', b', c'), se llama *producto vectorial* de **u** y **v**, que se denota **u** × **v**, al vector cuyas componentes son $(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b)$. Es decir, si **i**, **j** y **k** son los vectores que forman la base del sistema de referencia, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (bc' - b'c)\mathbf{i} + (ca' - c'a)\mathbf{j} + (ab' - a'b)\mathbf{k}$.

Propiedades del producto vectorial

El producto vectorial es

— *Anticonmutativo:* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

— *Asociativo respecto a escalares:*
$(r\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (r\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

— $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, para cualquier vector,

— $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Es decir el vector **u** × **v** es perpendicular a la vez a **u** y **v**, y por tanto al plano que éstos determinan.

Interpretación geométrica

La *identidad de Lagrange* establece que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$, y de aquí resulta que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo que forman **u** y **v**. Por tanto el producto vectorial de dos vectores es otro vector cuyo *módulo* es el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman, cuya *dirección* es perpendicular a ambos vectores y cuyo *sentido* es el del desplazamiento de un tornillo cuando se pasa girando el primer vector sobre el segundo, por el camino más corto (fig. 1).

INCIDENCIA Y PARALELISMO

Incidencia en el espacio

Radiación de planos. Consideremos un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un plano $Ax + By + Cz + D = 0$; se dice que este punto es *incidente* con el plano, es decir que está en el plano, si se verifica que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Restando esta ecuación de la del plano se obtiene la ecuación de la *radiación de planos* de vértice P_0;

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Esta ecuación representa para distintos valores de A, B y C, todos los planos que pasan por P_0.

Haz de planos. Si los puntos P_0 y P_1 son incidentes con el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, se tiene que verificar simultáneamente que

$$\left.\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Suponiendo variables *A*, *B* y *C*, el conjunto de planos que verifican este sistema recibe el nombre de *haz de planos* de arista P_0P_1 (figura 3).

Plano incidente con tres puntos. Si se tienen los puntos del espacio P_0, P_1 y P_2, todos incidentes con el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, se deberá cumplir el sistema

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0;\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0;\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{aligned}\right\}$$

Si el sistema tiene solución, al despejar *A*, *B*, *C* y *D* se obtiene una ecuación de la forma $Mx + Ny + Pz + Q = 0$, que representa la ecuación general del plano determinado por estos tres puntos.

Posición relativa de dos rectas en el espacio

Dadas la rectas *r* y *r'* de vectores directores $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $\mathbf{v}' = (a', b', c')$ y que pasan por los puntos P_0 y P'_0, respectivamente, se tiene:

— Si **v** y **v'** son proporcionales ($a/a' = b/b' = c/c'$), entonces *r* y *r'* son *paralelas y coplanarias* (figura 4).

— Si además de paralelas y coplanarias, $\mathbf{P_0P'_0}$ es proporcional a **v**, entonces *r* y *r'* son rectas *coincidentes.*

— Si **v** y **v'** son linealmente independientes pero el vector $\mathbf{P_0P'_0}$ es una combinación de ambos, entonces *r* y *r'* se *cortan* en un punto. Para calcularlo basta resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas ya que una de ellas será combinación lineal de las otras.

— Si **v**, **v'**, $\mathbf{P_0P'_0}$ son linealmente independientes, entonces *r* y *r'* se cruzan.

Posición relativa de dos planos

Dados dos planos *M* y *M'*, se tendrá que si el sistema formado por sus ecuaciones

— No tiene solución, entonces *M* y *M'* son *paralelos* ($A/A' = B/B' = C/C' \neq D/D'$), (fig. 5).

— Si existe solución y las dos ecuaciones son proporcionales, *M* y *M'* son *coincidentes.*

— Si el sistema tiene infinitas soluciones y las ecuaciones no son proporcionales, entonces *M* y *M'* se *cortan* en una recta. Esta recta determina el haz de planos (ver C/9).

Posición relativa de una recta y un plano

Dada la recta *r* que pasa por P_0 y cuyo vector es **v** y dado el plano *M* que pasa por P'_0 y de vectores directores **v'** y **v''**,

— Si **v'** y **v''** son linealmente independientes, *r* y *M se cortan* en un punto (figura 6).

— Si **v** es combinación lineal de **v'** y **v''**, *r* y *M son paralelos.*

— Si además de ser **v** una combinación lineal de **v'** y **v''** también lo es del vector $\mathbf{P_0P'_0}$, la recta se halla *contenida* en el plano.

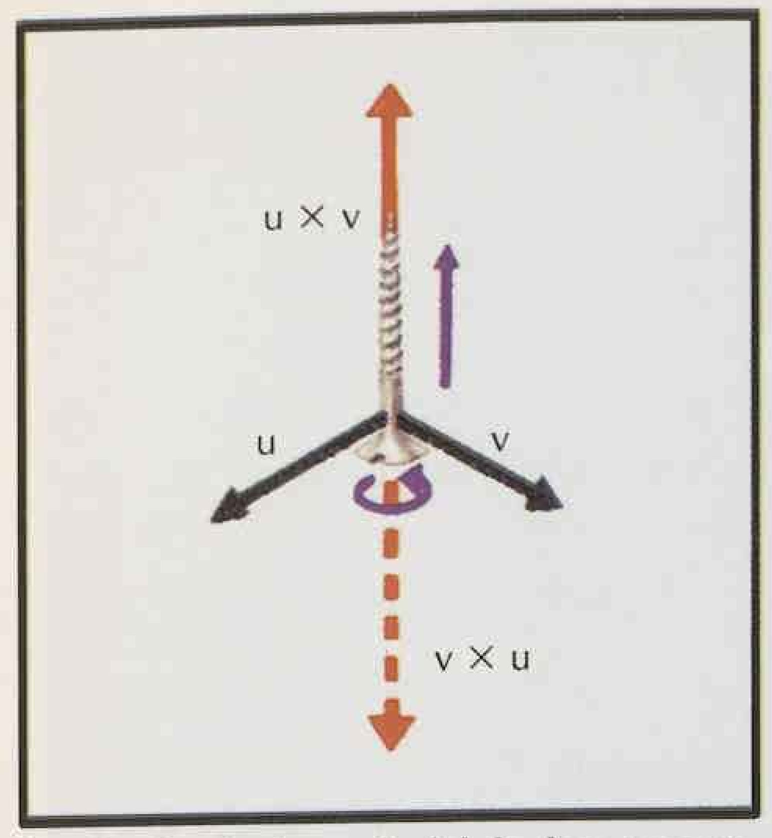


Fig. 1 – Producto vectorial de dos vectores.

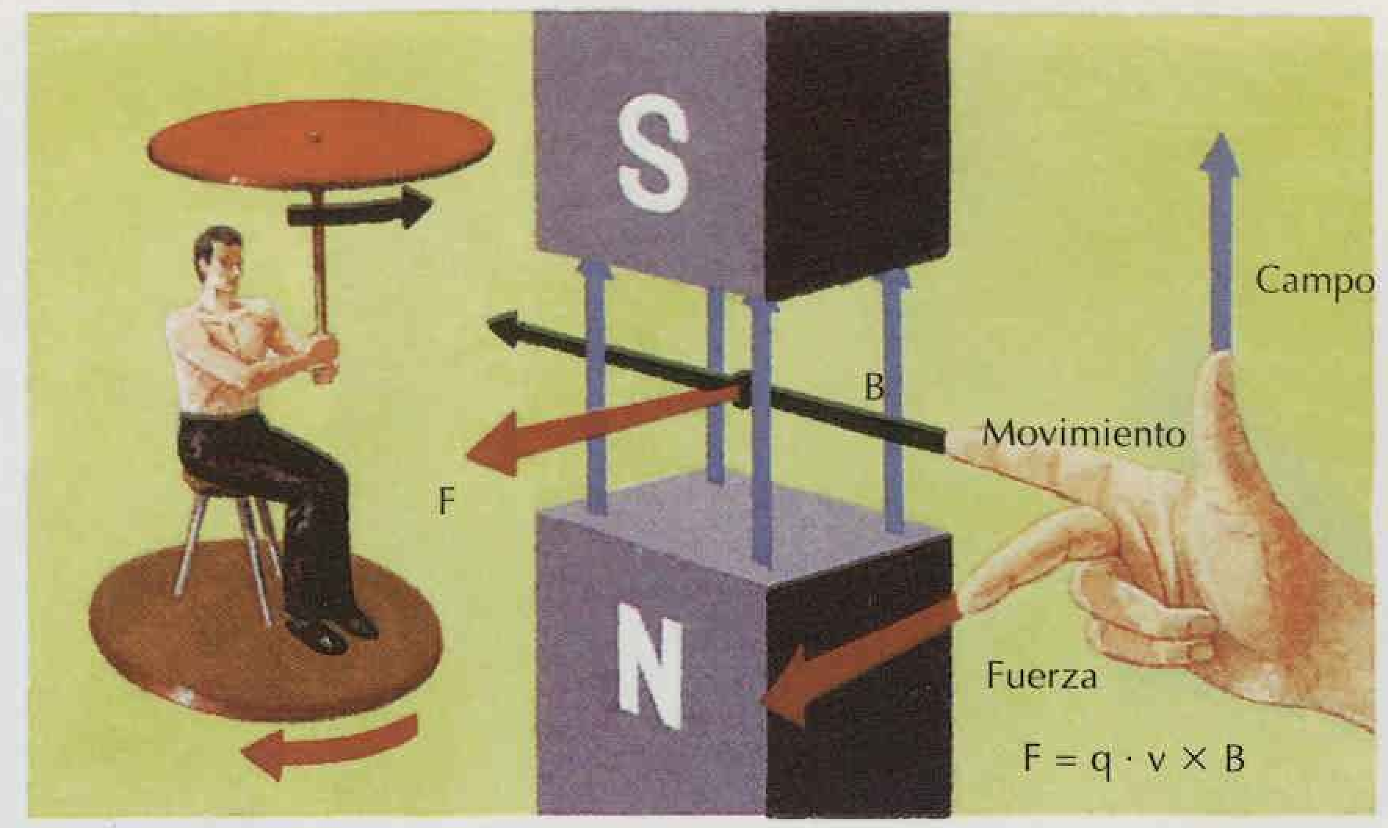


Fig. 2 – Aparece el producto vectorial en un momento de rotación o en la fuerza sobre una carga en un campo magnético.

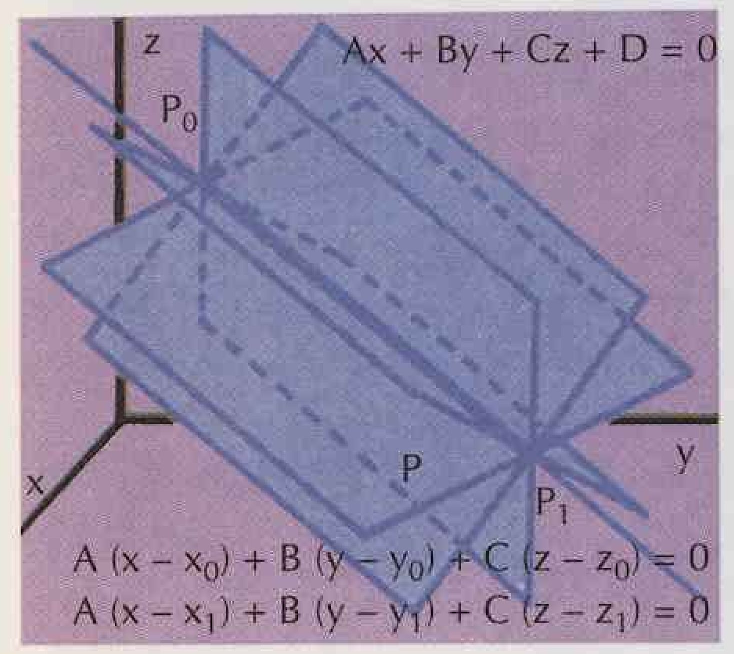


Fig. 3 – Haz de planos.

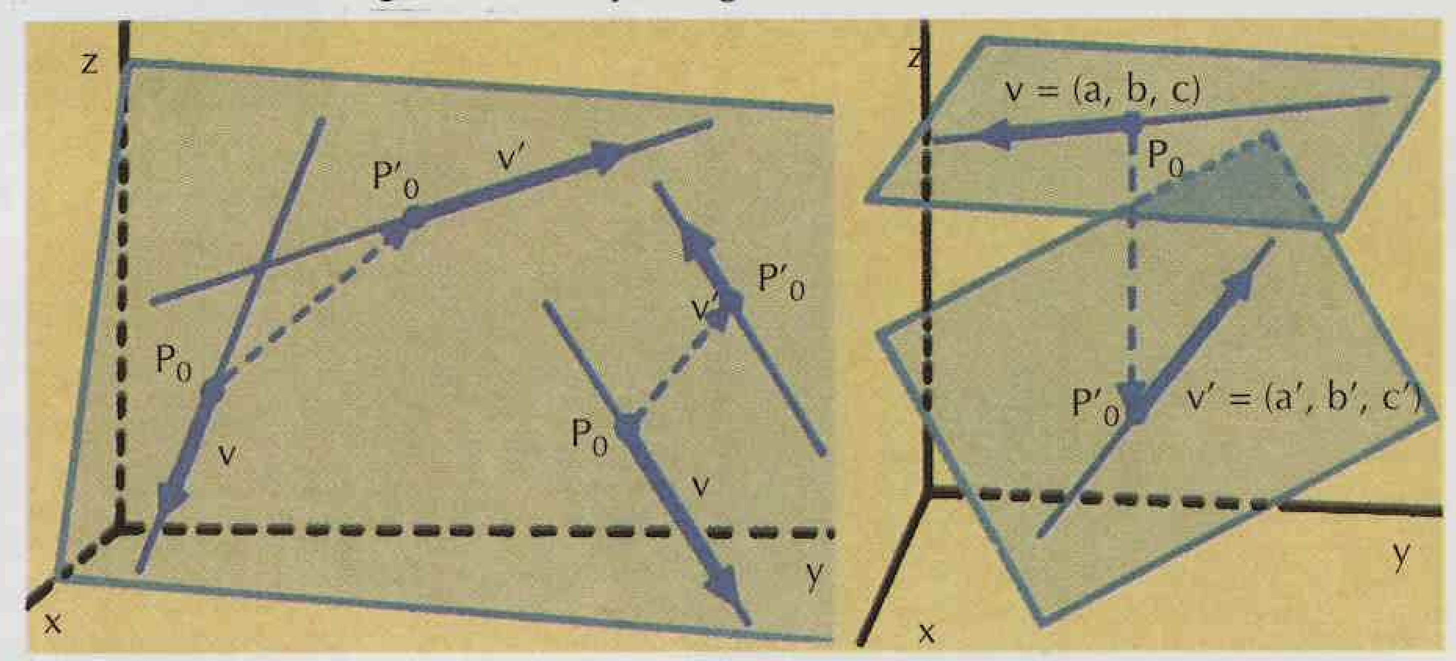


Fig. 4 – Posiciones relativas de dos rectas en el espacio: coplanarias (secantes o paralelas) y rectas que se cruzan.

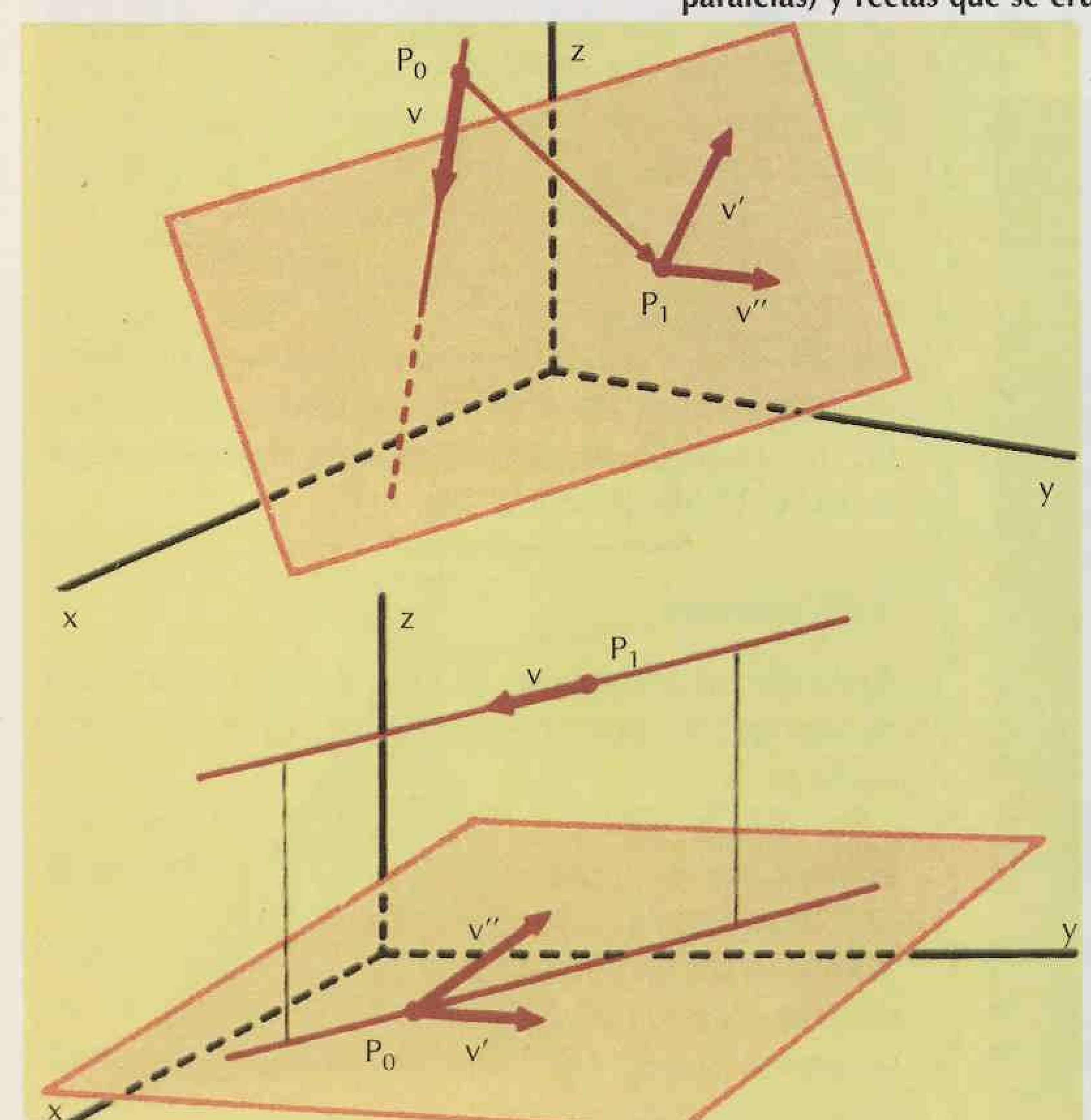


Fig. 6 – Posiciones recta-plano: recta que corta en un punto (arriba, por P_0), recta paralela al plano (abajo, por P_1) y recta contenida en él (abajo, por P_0).

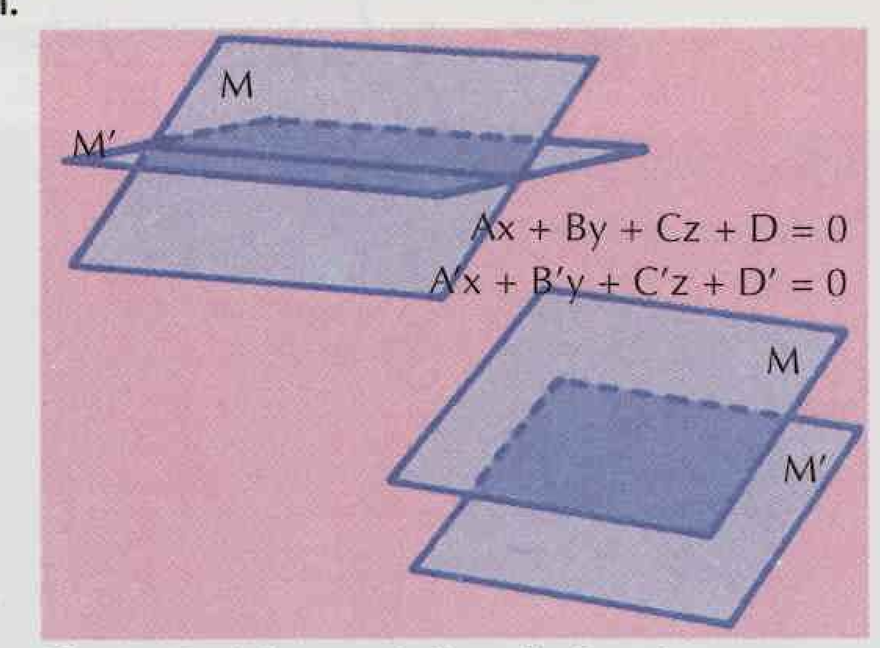


Fig. 5 – Posiciones relativas de dos planos: secantes y paralelos.

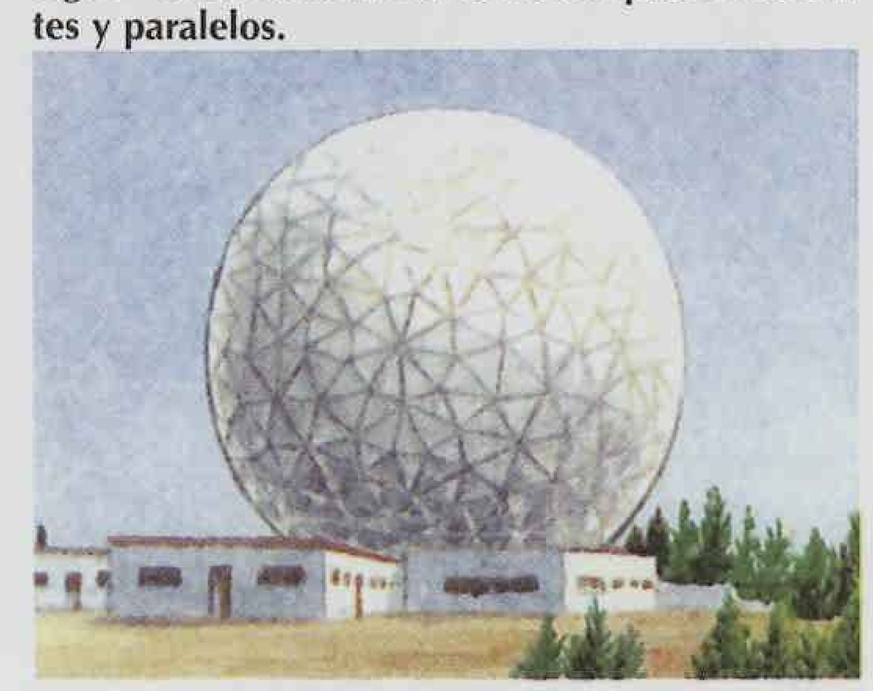


Fig. 7 – Planos que se cortan y planos paralelos en la cúpula del radiotelescopio de Haystach.

DISTANCIAS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

Distancias

Distancia entre dos puntos. Dados los puntos P y P' de $\mathbf{R}^3$, tales que si O es el origen de coordenadas los vectores OP y OP' tienen componentes (a, b, c) y (a', b', c'), respectivamente, entonces la distancia entre P y P' será

$$d(P, P') = |OP - OP'| = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$$

(ver figura 1 en C/8).

Distancia de un punto a un plano. Dado un plano M de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, y un punto P, que no pertenezca a él, la distancia de P a M es la distancia entre P y su proyección P_0 sobre el plano M, es decir

$$d(P, M) = d(P, P_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ (fig. 1)}$$

Consecuencia. La distancia entre dos planos paralelos se calcula tomando un punto de uno y calculando su distancia al otro.

Distancia de un punto a una recta. Si una recta r tiene un vector director $\mathbf{u}$, la distancia de un punto P del espacio a esta recta es la distancia de P a su proyección P_0 sobre dicha recta. Si N es un punto de la recta y $\mathbf{v} = \mathbf{PN}$,

$$d(P, r) = d(P, P_0) = \sqrt{d^2(N, P) - d^2(N, P_0)} \text{ (fig. 2)}$$

es decir,

$$d(P, r) = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{|\mathbf{u}|^2}}.$$

Distancia entre dos rectas que no se cortan. Si las dos rectas son paralelas basta hallar la distancia entre un punto perteneciente a una de ellas y la otra recta.

Dadas dos rectas r y r' que se cruzan, de vectores directores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ y que pasan por los puntos P_0 y P'_0, respectivamente, la mínima distancia entre ellas, $d(r, r')$ es

$$d(r, r') = \frac{|\mathbf{P_0 P'_0} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}')|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|} \quad \text{(figura 3).}$$

Ángulos

Ángulo entre dos rectas. Dadas dos rectas que se cortan, el ángulo que forman es el ángulo que forman sus respectivos vectores directores (ver C/8).

Ángulo entre recta y plano. Es el ángulo determinado por la recta y su proyección sobre el plano. Si el plano es $Ax + By + Cz + D = 0$ y la recta es $(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$, entonces

$$\text{sen } \alpha = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ángulo entre dos planos. Dados los planos M y M', no paralelos, el ángulo que forman es igual al ángulo que forman dos vectores, cada uno perpendicular a uno de los planos (figura 4),

$$\cos \alpha = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Consecuencias

Vector asociado a un plano. Se llama *vector asociado* al plano $Ax + By + Cz + D = 0$, al vector $\mathbf{m} = (A, B, C)$. Este vector es perpendicular al plano, pues si se considera un vector del mismo, determinado por los puntos P_1 y P_2, se tiene que $\mathbf{m} \cdot \mathbf{P_1P_2} = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$, que es precisamente la condición de incidencia de los dos puntos en el plano.

Condiciones de perpendicularidad

— Dadas dos rectas de vectores directores (a, b, c) y (a', b', c'), serán perpendiculares si $aa' + bb' + cc' = 0$.

— Dos planos $Ax + By + Cz + D = 0$ y $A'x + B'y + C'z + D = 0$, serán perpendiculares si lo son sus vectores asociados, $AA' + BB' + CC' = 0$.

— Una recta será perpendicular a un plano cuando el vector director de la recta sea paralelo al vector asociado del plano, $A/a = B/b = C/c$.

• **Ejemplo.** Hallar el ángulo que forman las rectas $(x - 2)/2 = (y - 3)/6 = (z - 1)/7$ y $(x - 1)/2 = (y - 3)/4 = (z - 2)/9$. Hallar también el ángulo formado por los planos $2x + 6y + 7z + 1 = 0$ y $2x + 4y + z = 0$. Los vectores directores de las rectas son $(2, 6, 7)$ y $(2, 4, 9)$, sus módulos valen $\sqrt{89}$ y $\sqrt{101}$, respectivamente, por tanto $\cos\alpha = (2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 9)/\sqrt{89 \cdot 101} = 91/\sqrt{8989}$, $\alpha \cong 16° 17' 56''$. Para hallar el ángulo que forman los planos, basta considerar el ángulo que forman los vectores asociados: $(2, 6, 7)$ y $(2, 4, 1)$; se obtiene que $\cos\beta = 35/\sqrt{1869}$, $\beta \cong 35° 56' 40''$.

Aplicaciones

Área de un triángulo. El área S de un triángulo determinado por los puntos P, Q y R, viene dada por

$S = |\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}|/2 = |\mathbf{RP} \times \mathbf{RQ}|/2$ (figura 5)

El área de un paralelogramo podrá obtenerse por descomposición en triángulos.

Volumen de un tetraedro. Sea un tetraedro determinado por los puntos P, Q, R, y S (figura 6), el volumen puede calcularse a partir del volumen de una pirámide:

Vol. $(PQRS)$ = *Área* (PQR) · *dist.* $(S$, *plano* $PQR)/3 = |(\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR})| \cdot \mathbf{QS}/6 = |(\mathbf{SQ} \times \mathbf{SR})| \cdot \mathbf{PQ}/6$. El volumen de un paralelepípedo se podrá calcular por descomposición en tetraedros.

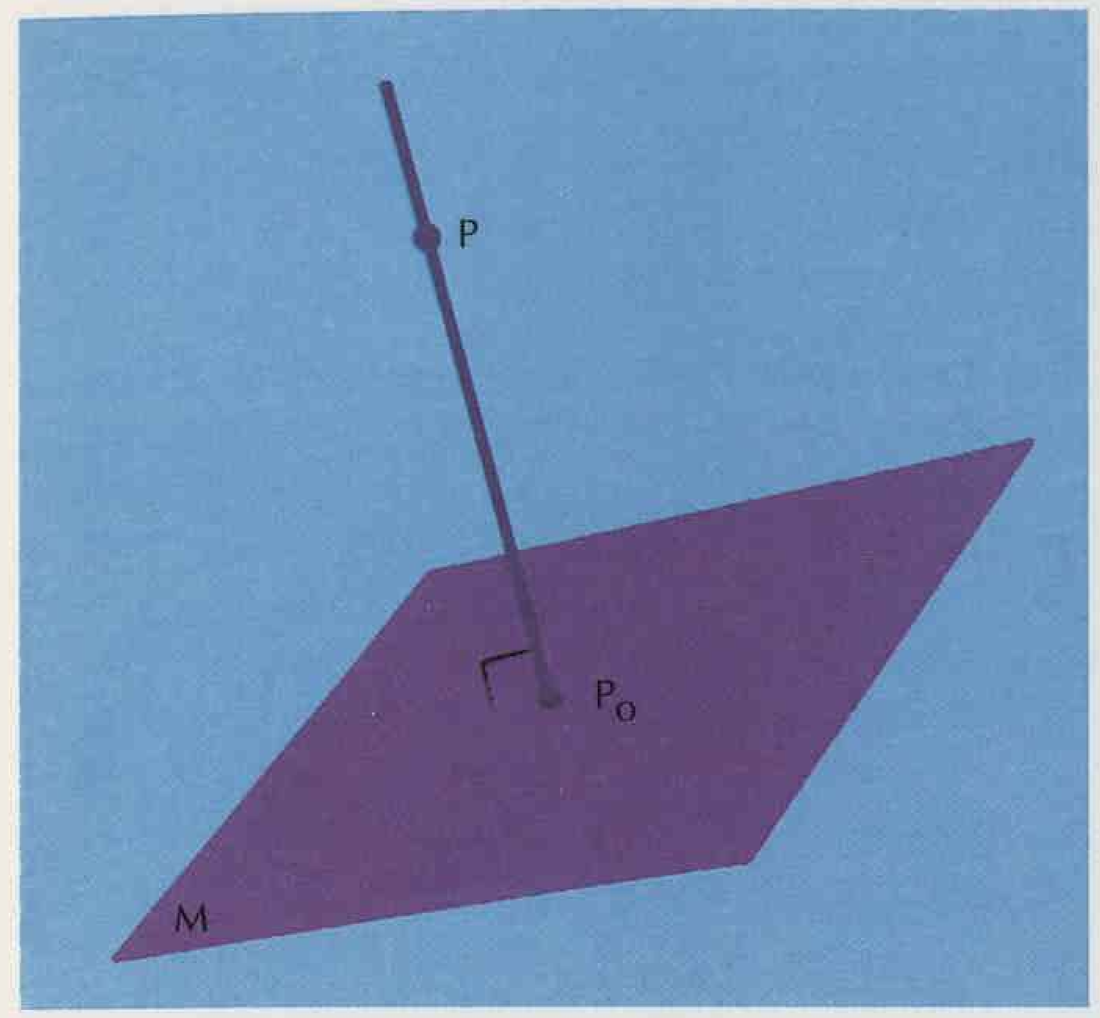


Fig. 1 – Distancia de un punto a un plano.

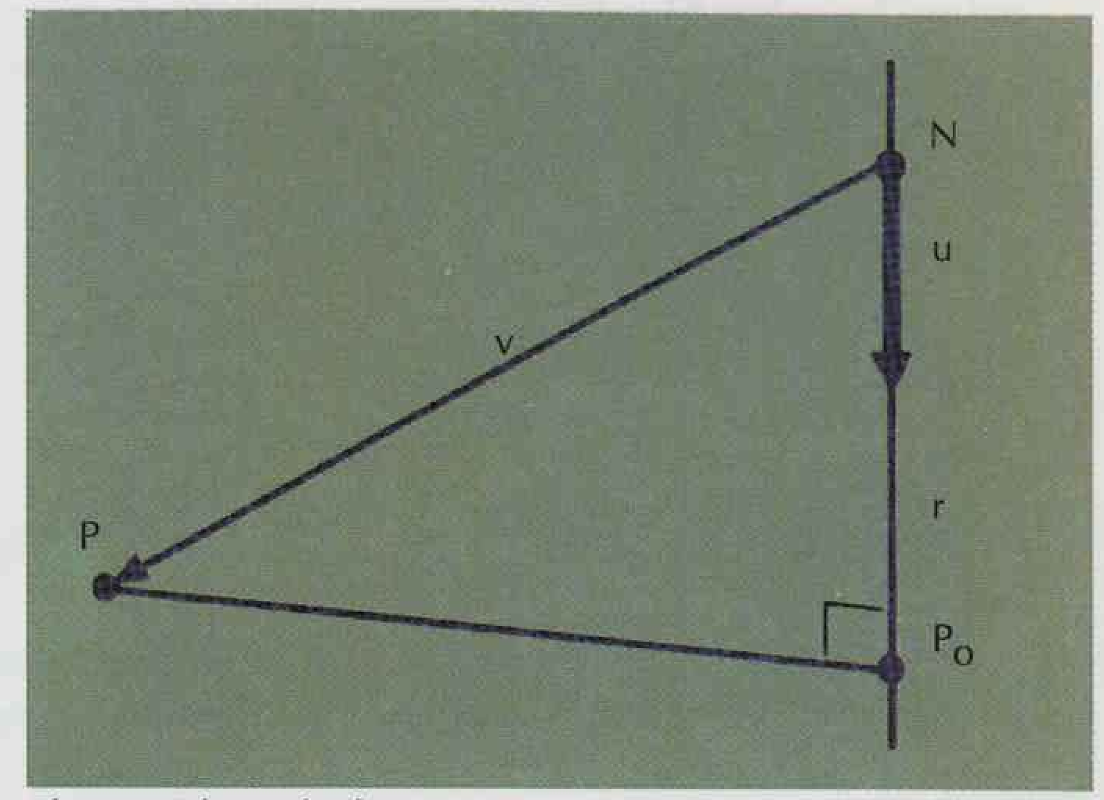


Fig. 2 – Distancia de un punto a una recta.

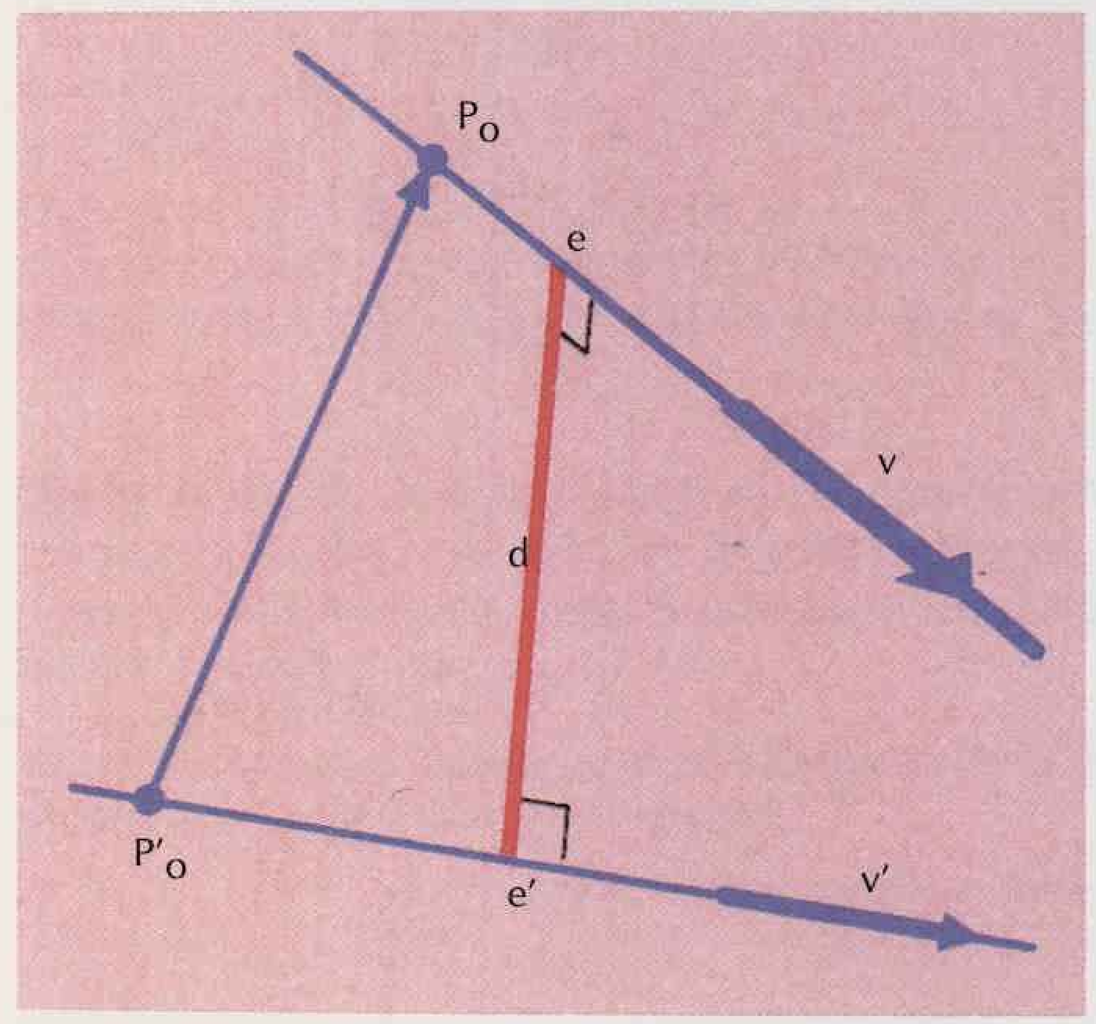


Fig. 3 – Distancia entre dos rectas que se cruzan.

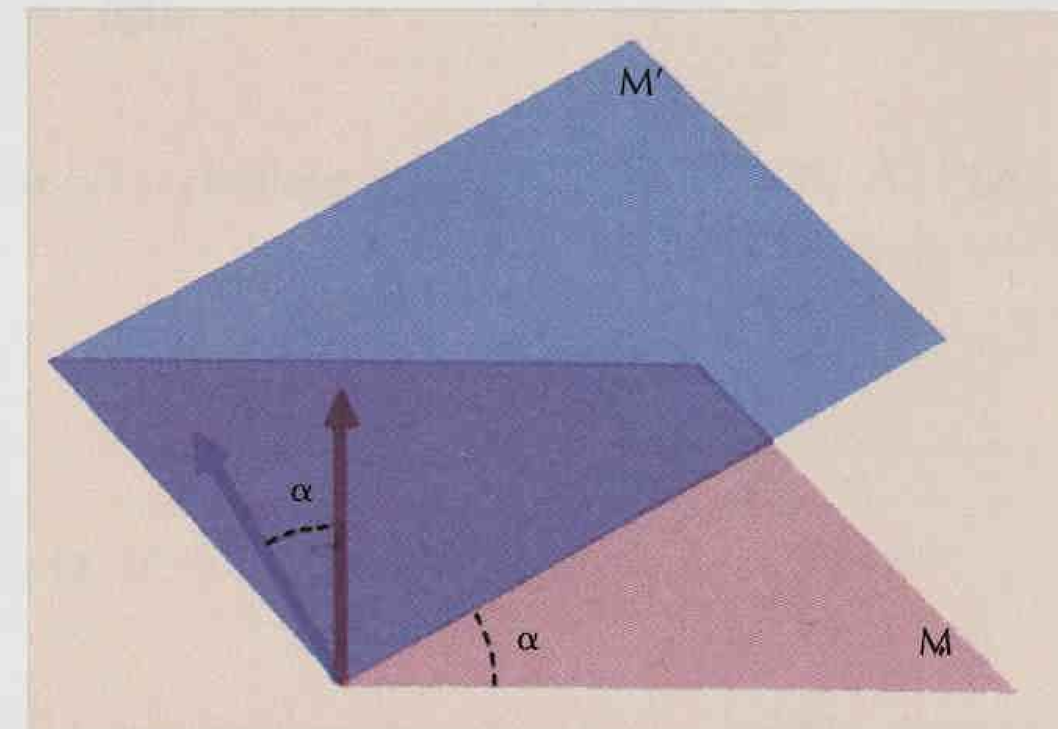


Fig. 4 – Ángulo entre dos planos que se cortan.

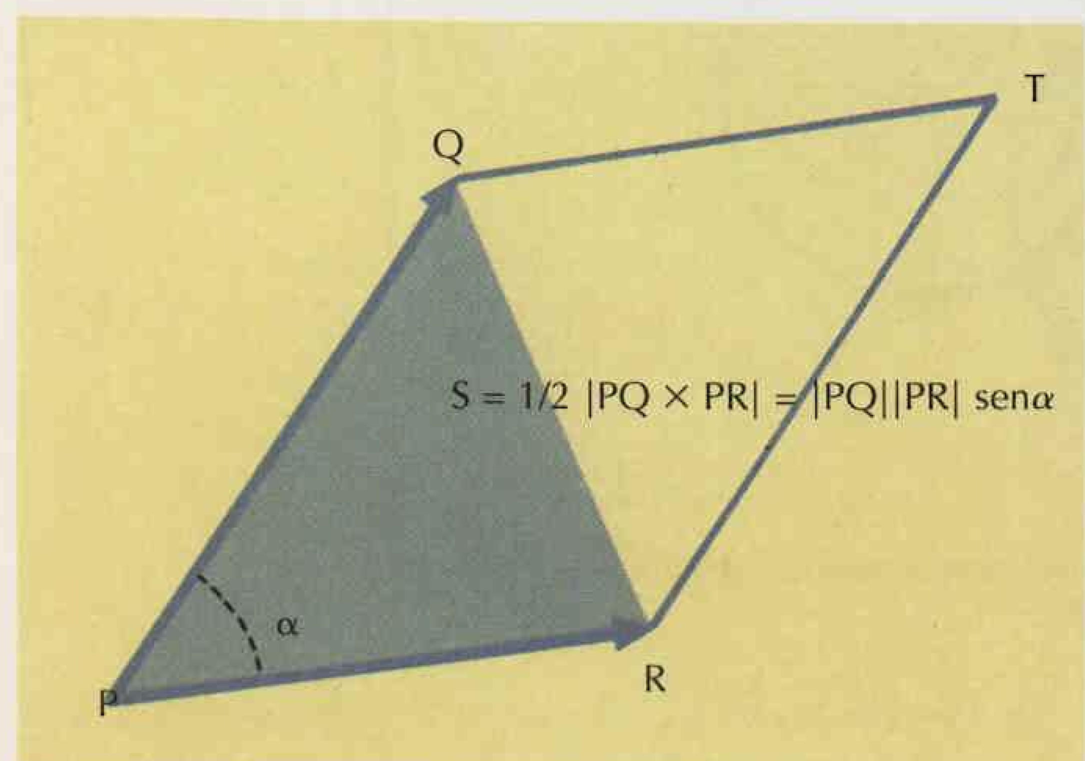


Fig. 5 – Área del triángulo en función del producto vectorial.

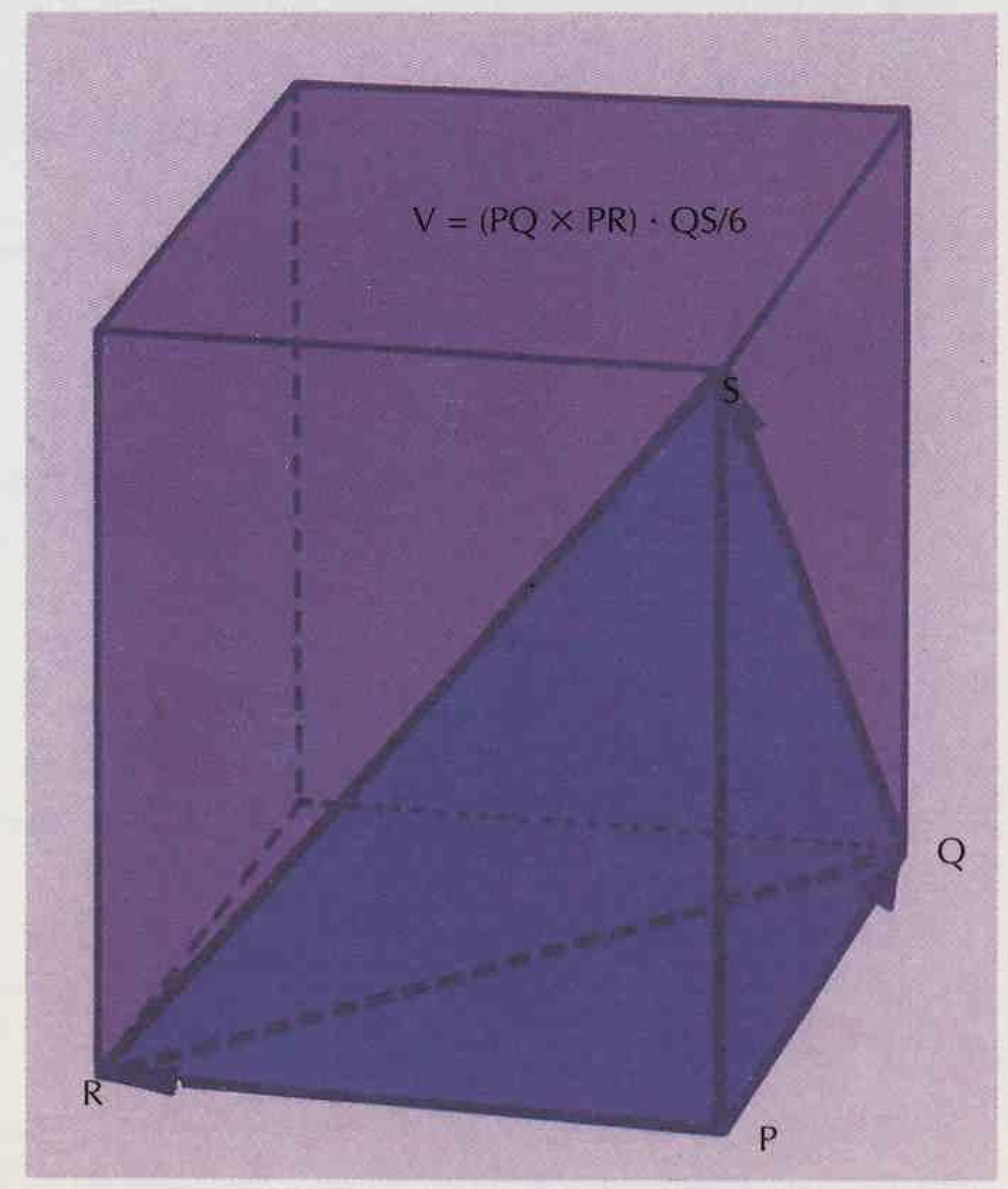


Fig. 6 – Volumen V del tetraedro limitado por cuatro puntos (zona sombreada) en función del producto vectorial y del producto escalar.

Ejercicio A/1-1. Dados los conjuntos $A = \{a, e, i\}$, $B = \{a, e, o, u\}$, $C = \{e, i, o, u\}$ y $D = \{a, o\}$, sobre el referencial $V = \{a, e, i, o, u\}$, explíquese si las afirmaciones que siguen son ciertas o falsas:

1. $a \in A$,	4. $D \subset B$,	7. $\varnothing \in P(B)$,
2. $a \in C$,	5. $\varnothing \in A$,	8. $\varnothing \subset P(B)$,
3. $D \subset A$,	6. $\varnothing \subset A$,	9. $D \in P(B)$.

1. $a \in A$ es cierto, pues a es elemento de A.
2. $a \in C$ es falso, pues a no es elemento de C.
3. $D \subset A$ es falso, pues $o \in D$, pero $o \notin A$.
4. $D \subset B$ es cierto, pues todos los elementos de D pertenecen a B.
5. $\varnothing \in A$ es falso, pues $\varnothing$ no es elemento de A.
6. $\varnothing \subset A$ es cierto, pues $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto.
7. $\varnothing \in P(B)$ es cierto, pues los elementos de $P(B)$ son los subconjuntos de B, y $\varnothing$ es subconjunto de B, es decir, $\varnothing \subset B$.
8. $\varnothing \subset P(B)$ es cierto, pues $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto.
9. $D \in P(B)$ es cierto, pues D es subconjunto de B (ver [g]).

Ejercicio A/1-2. Con los mismos conjuntos del ejercicio A/1-1, hállese $A \cap B$, $A \cup B$, $D' \cap B$, $(A \cup D)'$, $D \times (B \cap C)$.

$A \cap B = \{a, e\}$.
$A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$.
$D' = \{e, i, u\}$, luego $D' \cap B = \{e, u\}$.
$A \cup D = \{a, e, i, o, u\}$, luego $(A \cup D)' = \{u\}$.
$B \cap C = \{e, o, u\}$, luego $D \times (B \cap C) = \{(a\ e), (a, o), (a, u), (o, e), (o, o), (o, u)\}$.

Ejercicio A/1-3. En un conjunto de 36 personas hay 21 que hablan francés, 18 que hablan alemán y 5 que no hablan ninguno de esos dos idiomas. Represéntese la situación descrita mediante conjuntos y diagramas de Venn, y utilícense los datos para determinar cuántas personas hay en C que hablan francés y alemán.

Sea C el conjunto citado; F, el subconjunto de C contituido por quienes hablan francés, y A, el constituido por quienes hablan alemán.

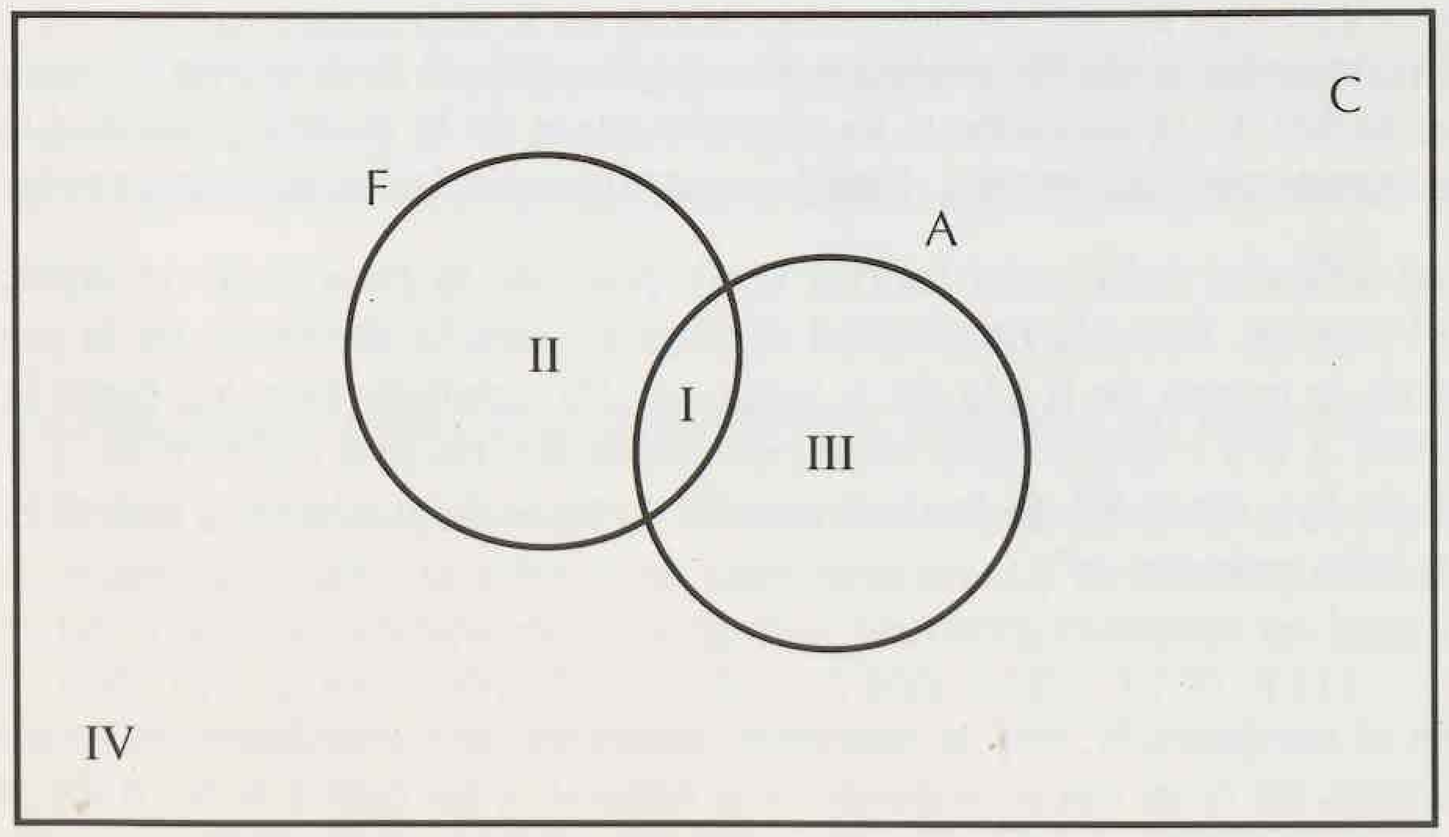


Fig. 1

El diagrama adjunto describe la situación. En él, C queda dividido en cuatro regiones disjuntas, simbolizadas por I, II, III y IV, siendo $I = F \cap A$, $II = F - A$, $III = A - F$, $IV = (F \cup A)'$. Sean n_1, n_2, n_3 y n_4 los respectivos números de elementos de esas cuatro regiones.
De los datos se deduce que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 36$ (1), $n_1 + n_2 = 21$ (2), $n_1 + n_3 = 18$ (3), $n_4 = 5$ (4). De (1), (2) y (4) se sigue que $n_3 = 10$, y, aplicando esto último a (3), que $n_1 = 8$; es decir, hay 8 personas en C que hablan los dos idiomas.

Ejercicio A/2-1. Determínese si las correspondencias de N = {nombres de varón} en V = {letras vocales}, que se dan a continuación, son aplicaciones. En caso afirmativo, dígase si son inyectivas, exhaustivas o biyectivas: (*a*) la que a cada nombre de varón le hace corresponder la segunda vocal que aparece en él; (*b*) la que a cada nombre le hace corresponder la primera vocal que aparece en él.

(*a*) Existen nombres (como Blas) que no tienen segunda vocal, es decir, existen elementos de N que no tienen imagen en V. Por tanto, no es aplicación.
(*b*) Todo nombre tiene una primera vocal, y es única, luego es aplicación. Los nombres Argimiro, Fernando, Ignacio, Joaquín y Julio demuestran que toda vocal es la «primera» de algún nombre, luego la aplicación es exhaustiva. Sin embargo, existen nombres diferentes, como Alfredo y Pablo, que coinciden en la primera vocal, luego la aplicación no es inyectiva. Por tanto, no es biyectiva.

Ejercicio A/2-2. Véase si puede considerarse aplicación la correspondencia de **Z** en **N** ∪ {0} definida por la fórmula $f(x) = |x|$. En caso afirmativo, dígase si es inyectiva, exhaustiva o biyectiva.

Si $x \in \mathbf{Z}$, $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) existe, es único, y es entero positivo o vale cero (caso $|0| = 0$); o sea, puede considerarse que $|x| \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Esto prueba que f es aplicación. Recíprocamente, todo natural n es valor absoluto de los enteros $\pm n$ (ejemplo: $4 = |\pm 4|$), y $0 = |0|$; es decir, todo elemento del conjunto final es imagen de uno o dos elementos del conjunto inicial, luego es exhaustiva y no es inyectiva ni biyectiva.

Ejercicio A/2-3. Las mismas preguntas del ejercicio A/2-2 para la correspondencia definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$, según se considera de **Z** en **Z** o de **Q** en **Q**.

(*a*) De **Z** en **Z**: Ni siquiera es aplicación, pues existen elementos del conjunto inicial, como $x = 2$, para los que $f(x) \notin \mathbf{Z}$ ($f(2) = 1{,}5 \notin \mathbf{Z}$); es decir, no tienen imagen en el conjunto final.
(*b*) Es aplicación, pues, si $x \in \mathbf{Q}$ (conjunto inicial), $f(x) = \dfrac{x+1}{2} \in \mathbf{Q}$ (conjunto final) y es único. Además, si $y \in \mathbf{Q}$ (conjunto final), sus antiimágenes deben ser racionales, x, que cumplan $\dfrac{x+1}{2} = y$; despejando x, se tiene $x = 2y - 1$, que existe y es racional (ejemplo: para $y = 2$, se tiene $x = 3$). Es decir, todo $y \in \mathbf{Q}$ (conjunto final) es imagen de un solo $x \in \mathbf{Q}$ (conjunto inicial), luego f es biyectiva.

Ejercicio A/2-4. El conjunto, E, de los edificios de una ciudad, se define una relación, P, del siguiente modo: aPb, que se lee «a es próximo a b», significa que de la puerta principal del edificio a a la del edificio b hay menos de 100 metros. Estúdiese qué propiedades tiene esta relación.

Tiene la propiedad reflexiva (aPa, para todo $a \in E$), pues de la puerta de un edificio a ella misma hay menos de 100 metros. Tiene la propiedad simétrica, pues la distancia de la puerta de a a la de b es la misma que de la puerta de b a la de a, luego si aPb, también bPa. No tiene la propiedad transitiva: si tres edificios a, b y c están colocados por ese orden en una calle recta, y hay 80 metros de la puerta de a a la de b, y otros 80 de la de b a la de c, de la de a a la de c habrá 160 metros, luego se cumplirá aPb y bPc, pero no aPc.

Ejercicio A/2-5. En el conjunto **N**, de los números naturales, se consideran las relaciones siguientes: (*a*) aRb si a es múltiplo de b, es decir, si existe otro natural n, tal que $a = b \cdot n$ (*b*) aRb si $a - b$ es un entero múltiplo de 3. Estúdiese cada una de estas relaciones, indicando si es de equivalencia u orden y, en caso afirmativo, explicando la clasificación u ordenación a que da lugar.

(*a*) Es reflexiva, pues $a = a \cdot 1$, esto es, aRa para todo $a \in \mathbf{N}$.
Es antisimétrica, pues, si aRb y bRa, entonces $a = b \cdot n$ y $b = a \cdot m$, de donde se deduce que $b = b \cdot n \cdot m$, luego $n \cdot m = 1$. Como n y m son naturales, debe ser $n = m = 1$, y, por tanto, $a = b$.
Es transitiva, pues si aRb y bRc, entonces $a = b \cdot n$ y $b = c \cdot m$, de donde se deduce que $a = c \cdot m \cdot n$, luego aRc (a es múltiplo de c).

Por tanto, es relación de orden amplio. Es parcial, pues existen números, como 3 y 4, tales que ninguno está relacionado con el otro (ninguno es múltiplo del otro). El 1 es el primer elemento, pues todos los demás naturales son múltiplos suyos, y siguen a 1, «en un segundo nivel», aquellos números que sólo pueden dividirse por sí mismos y por 1 (los primos: 2, 3, 5, 7, 11, ...), etc.
(*b*) Es reflexiva, pues $a - a = 0 = 3 \cdot 0$, esto es, aRa para todo $a \in \mathbf{N}$.
Es simétrica, pues aRb significa que $a - b = 3 \cdot z$, con $z \in \mathbf{Z}$; por tanto, $b - a = -3 \cdot z = 3 \cdot (-z)$, con $-z \in \mathbf{Z}$, lo que quiere decir que bRa.
Es transitiva: aRb y bRc significa que $a - b = 3 \cdot z$ (1) y $b - c = 3 \cdot z'$ (2), con z y z' enteros; debe observarse que $a - c = (a - b) + (b - c)$ (compruébese); entonces, de (1) y (2) se deduce que $a - c = 3 \cdot z + 3 \cdot z' = 3 \cdot (z + z')$, luego $a - c$ es múltiplo de 3, es decir, aRc.
Por tanto, es relación de equivalencia. Para estudiar las clases de equivalencia a que da lugar en el conjunto **N**, cojamos el primer natural, 1, y veamos qué otros naturales son equivalentes a él: el primero que hallamos es 4, pues $4 = 1 + 3$, luego $4 - 1 = 3$; sigue $7 = 1 + 6$, pues $7 - 1 = 6 = 2 \cdot 3$ ...; en general, son equivalentes a 1 los números de la forma $3 \cdot n + 1$; esos números constituyen la «clase del 1», que simbolizaremos por $\overline{1}$, de modo que $\overline{1} = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\} = \{3 \cdot n + 1\}$. A continuación, como 2 no se halla en la clase del 1, formemos la suya, y obtendremos que $\overline{2} = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\} = \{3 \cdot n + 2\}$. Análogamente se obtiene que $\overline{3} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\} = \{3 \cdot n\}$, y no hay más clases.

Ejercicio A/3-1. En el conjunto de enteros, **Z**, se considera la operación ⊕, definida por $a \oplus b = a + b - 2$. Demuéstrese que esa operación está bien definida, estúdiense sus propiedades y dígase si **Z** forma anillo con ⊕ y el producto habitual.

Debe empezarse por probar que ⊕ está bien definida, esto es, que la fórmula dada define, realmente, una aplicación de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ en **Z**. Ello es cierto, pues, para cualquier par de enteros, a y b, $a \oplus b = a + b - 2$ es entero, y único (no ocurriría lo mismo, por ejemplo, con $a * b = (a + b) : 2$, pues para ciertos valores enteros, como $a = 1$ y $b = 2$, se obtiene $a * b = 1{,}5$, que no es entero).
Es asociativa, pues $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c - 2) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$, y $(a \oplus b) \oplus c = (a + b - 2) \oplus c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$, luego $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.
Es conmutativa, pues $a \oplus b = a + b - 2 = b + a - 2 = b \oplus a$, para cualesquiera $a, b \in \mathbf{Z}$.
Para ver si existe elemento neutro, debemos preguntarnos si existe un $e \in \mathbf{Z}$, tal que $a \oplus e = a$, para cualquier otro $a \in \mathbf{Z}$. La condición $a \oplus e = a$ significa $a + e - 2 = a$, de donde se deduce que debe ser $e = 2$: ése es el elemento neutro.
Para ver si todo $a \in \mathbf{Z}$ tiene opuesto, debemos plantearnos $a \oplus x = e$, esto es, $a + x - 2 = 2$. Despejando x se obtiene $x = 4 - a$, luego todo entero a tiene opuesto en **Z** con esta operación, que es el dado por la fórmula $op\, a = 4 - a$.
Hasta este momento, está probado que **Z** es grupo conmutativo con la operación ⊕. El producto es asociativo, luego sólo falta ver si es distributivo con respecto a ⊕ para comprobar si **Z** es anillo con ambas operaciones. Pero, $a \cdot (b \oplus c) = a \cdot (b + c - 2) = a \cdot b + a \cdot c - 2 \cdot a$ (1), $(a \cdot b) \oplus (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c - 2$ (2) y, en general, (1) ≠ (2) (basta tomar $a \neq 1$), luego **Z** no es anillo con ⊕ y el producto.

Ejercicio A/4-1. Escríbanse los quince primeros números naturales, en base dos.

Obsérvese que cada dos unidades de orden p constituyen una unidad de orden $p + 1$; luego, cuando agregamos una nueva unidad a la cifra 1, se convierte en 0 y se añade una unidad a la siguiente cifra de la derecha, y así sucesivamente. Los quince primeros números en base dos son, pues: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Ejercicio A/4-2. Exprésese el número $4021_{(6}$ en base diez.

Sus cifras, de izquierda a derecha, representan, respectivamente: unidades, «paquetes de 6 unidades», «paquetes de 6 × 6 unidades», etc. Por tanto, $4021_{(6} = 1 + 2 \times 6 + 0 \times 6^2 + 4 \times 6^3 = 1 + 2 \times 6 + 0 \times 36 + 4 \times 216 = 1 + 12 + 0 + 864 = 877$.

Ejercicio A/4-3. Exprésese el número 4748 (base diez) en base 5.

Se debe distribuir 4748 unidades en paquetes de 5, 5^2 (25), 5^3 (625), … unidades, contando cuántos paquetes de cada tipo resultan, sin que nunca queden cinco o más, pues son suficientes para formar paquetes mayores.
La división 4748 por 5 da cociente 949 y resto 3, lo cual significa que $4748 = 949 \cdot 5 + 3$ («949 paquetes de cinco unidades cada uno, y 3 unidades sueltas»); por tanto, 3 es la cifra de las unidades de 4748 en base cinco.
La división de 949 por 5 da cociente 189 y resto 4; ello indica que los 949 «paquetes de cinco» permiten formar 189 «paquetes de $5 \times 5 = 25$», sobrando 4; por tanto, 4 es la cifra de las unidades de primer orden de 4748 en base 5.
Siguiendo este proceso se hallan las demás cifras. Puede resumirse así:

4748	5				
24	949	5			
48	44	189	5		
3	49	39	37	5	
	4	4	2	7	5
				2	1

$$4748 = 122443_{(5}$$

Ejercicio A/5-1. Un ascensor que inicialmente se encuentra en el séptimo piso de un edificio realiza estos movimientos, por este orden: baja cuatro pisos, sube diez, baja tres, baja ocho, sube tres y baja siete. Escríbase una expresión que, a partir de los datos, permita calcular dónde se encuentra el ascensor tras todos esos movimientos y calcúlese de diferentes formas.

La expresión será la suma del entero que representa la posición inicial del ascensor (+7) con los que representan los desplazamientos que ha efectuado (–4, +10, –3, –8, +3, –7). Puede escribirse así: $+7 - 4 + 10 - 3 - 8 + 3 - 7$ (suma algebraica).
Se puede calcular siguiendo el orden en que está escrita (que es el seguido por el ascensor en sus movimientos). La forma correcta de escribir tal cálculo es: $+7 - 4 + 10 - 3 - 8 + 3 - 7 = +3 + 10 - 3 - 8 + 3 - 7 = +13 - 3 - 8 + 3 - 7 = +10 - 8 + 3 - 7 = +2 + 3 - 7 = +5 - 7 = -2$.
Obsérvese que se llega al mismo resultado ordenando y agrupando de cualquier otro modo los sumandos, siempre que, al cambiarlos de lugar, «se trasladen con su signo» (ejemplo: $+7 - 4 + 10 - 3 - 8 + 3 - 7 = +10 + 3 - 3 + 7 - 7 - 4 - 8 = +10 + 0 + 0 - 12 = +10 - 12 = -2$). Ello se debe a la asociatividad y conmutatividad de la suma.
La solución obtenida, –2, se interpreta diciendo que el ascensor se halla dos pisos por debajo de la planta baja, o sea, en el segundo sótano.

Ejercicio A/5-2. Compramos 3 barras de turrón y 3 botellas de champán, pagando con un billete de 2.000 ptas. Cada barra de turrón cuesta 375 ptas. y cada botella de champán 350 ptas. ¿Cuánto dinero nos han de devolver?

Para obtener la cantidad de dinero que nos han de devolver debemos restar de 2.000 el importe de la compra, lo cual nos conduce a cualquiera de las expresiones $2.000 - (3 \times 375 + 3 \times 350)$ o $2.000 - 3 \times 375 - 3 \times 350$. Obsérvese, sin embargo, que también puede utilizarse la expresión $2.000 - 3 \times (375 + 350)$.

$$2.000 - (3 \times 375 + 3 \times 350) = 2.000 - (1.125 + 1.050) = 2.000 - 2.175 = -175$$
$$2.000 - 3 \times 375 - 3 \times 350 = 2.000 - 1.125 - 1.050 = 875 - 1.050 = -175$$
$$2.000 - 3 \times (375 + 350) = 2.000 - 3 \times 725 = 2.000 - 2.175 = -175$$

El resultado se interpreta así: en vez de devolvernos dinero, el tendero nos reclamará 175 ptas. más que nos faltan para pagar la compra.

Ejercicio A/5-3. (*Criterios de divisibilidad*) Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que un entero *N* sea divisible por (*a*) 2, (*b*) 3, (*c*) 5, (*d*) 9 es, respectivamente, que: (*a*) su última cifra sea par, (*b*) la suma de sus cifras sea divisible por 3, (*c*) su última cifra sea 0 o 5, (*d*) la suma de sus cifras sea divisible por 9.

Sean *a*, *b*, *c*, *d*, … las cifras de *N*, es decir, $N = \ldots cdba$.
(*a*) y (*c*) Se puede escribir $N = \ldots dcb \cdot 10 + a$, donde el primer sumando es múltiplo de 10, luego es divisible por 2 y por 5; es evidente, pues, que *N* será divisible por 2 (respectivamente, por 5) si, y sólo si, su última cifra, *a*, es divisible por 2 (respectivamente, divisible por 5, o sea, 0 o 5).
(*b*) y (*d*) Obsérvese que se puede escribir $N = \ldots d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a = \ldots d \cdot (999 + 1) + c \cdot (99 + 1) + d \cdot (9 + 1) + e = (\ldots 999 \cdot d + 99 \cdot c + 9 \cdot b) + \ldots + d + c + b + a$, en donde la expresión entre paréntesis es múltiplo de 9 y 3, pues lo son 9, 99, 999… Por tanto, es evidente que la condición necesaria y suficiente para que *N* sea divisible por 3 (respectivamente, por 9) es que también lo sea la suma de sus cifras.

Ejercicio A/5-4. Descomponer en factores primos 24, 81, 528, 437 y 523.

El primero puede descomponerse en factores mentalmente, pues es sabido que $24 = 6 \times 4$, y $6 = 3 \times 2$, $4 = 2 \times 2$. Resumiendo, se tiene: $24 = 6 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$.
Análogamente, $81 = 9 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.
Para descomponer 528 se prueba a dividirlo por los números primos, empezando por 2, y lo mismo se hace con el cociente de la división, cuando ésta dé resto cero. Ese proceso se sigue hasta que se obtenga un número primo como cociente; en ese momento, la descomposición en factores primos de 528 es el producto de todos los primos por los que se ha dividido y del último cociente. A continuación se halla resumido y explicado.

528	2	$528 = 2 \times 264$
264	2	$264 = 2 \times 132$
132	2	$132 = 2 \times 66$
66	2	$66 = 2 \times 33$
33	3	$33 = 3 \times 11$
11		11 es primo

$$528 = 2 \times 264 = 2 \times 2 \times 132 = = 2 \times 2 \times 2 \times 66 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 33 = = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^4 \times 3 \times 11.$$

Para descomponer 437 se aplicaría el mismo proceso. Sucede, sin embargo, que 437 no es divisible por 2, ni tampoco por 3, 5, 7, 11, 13, 17. Sí lo es por 19, obteniéndose cociente 23, que es primo. Por tanto, $437 = 19 \times 23$.
523 no es divisible por 2, ni por 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… Al probar a dividirlo por 23 se obtiene cociente 22 y resto 17. Cuando se llega a una división cuyo cociente es menor que el divisor, sin que ninguna otra anterior dé resto cero, se puede asegurar que el número dado es primo. Por tanto, 523 es primo.

Ejercicio A/5-5. Calcúlese el M.C.D. y el M.C.M. de: (*a*) 25 y 15 (*b*) 528 y 360.

(*a*) Pueden calcularse mentalmente: El mayor divisor común de 25 y 15 es, evidentemente, 5, o sea, M.C.D. (15, 25) = 5. Son múltiplos de 25 los números 25, 50, 75, … y este último es múltiplo de 15, pues $75 = 15 \times 5$, pero no lo son los anteriores; luego, el menor múltiplo común de 25 y 15 es 75, es decir, M.C.M. (25, 15) = 75.
(*b*) Se sabe que $528 = 2^4 \times 3 \times 11$ (ejercicio anterior). Análogamente, se halla que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
Es evidente que los divisores comunes a 528 y 360 deben tener una descomposición en factores que «esté contenida» en la de ambos, siendo $2^3 \times 3$ la «mayor» que cumple esa condición; por tanto, M.C.D. (528, 360) = $2^3 \times 3 = 24$.
Los múltiplos comunes a 528 y 360 deben tener una descomposición en factores que «contenga» a las de ambos, siendo $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$ la «menor» que cumple esa condición; por tanto, M.C.M. (528, 360) = $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11 = 7920$.
En general, el M.C.D. de dos números está formado por los factores primos comunes a ambos, cada uno de ellos tomado con el menor exponente que aparece en las respectivas descomposiciones; el M. C. M. está formado por los factores primos comunes y no comunes a ambos, tomando los comunes con el mayor exponente con que aparece en ambas descomposiciones (compruébese con 528 y 360).

Ejercicio A/6-1. Simplifíquese la fracción $\frac{360}{528}$.

Debe hallarse una fracción equivalente, cuyo denominador sea el menor posible (en valor absoluto). Ello se consigue dividiendo numerador y denominador por el mayor divisor común de ambos.
Como M.C.D. (528, 360) = 24, $\frac{360}{528} = \frac{360 : 24}{528 : 24} = \frac{15}{22}$.

Ejercicio A/6-2. Hállese la forma general de las fracciones equivalentes a $\frac{360}{528}$.

La equivalente más simple es $\frac{15}{22}$ (ej. A/6-1.). Cualquier otra equivalente a la dada, debe serlo a ésta, y es evidente que sólo pueden obtenerse equivalentes a $\frac{15}{22}$ multiplicando su numerador y denominador por un mismo entero (no nulo). Por tanto, las equivalentes a $\frac{360}{528}$ son las de la forma $\frac{15\cdot z}{528\cdot z}$, con $z \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Ejercicio A/6-3. Calcúlese: (*a*) $\frac{11}{24}+\frac{5}{36}$ (*b*) $\frac{22}{45}\cdot 25\cdot\frac{21}{20}$ (*c*) $\frac{3/7}{5}$.

(*a*) Al igual que para poder sumar 2 m y 3 dm hay que expresar antes ambas longitudes en la misma unidad (así, se tiene, 2 m + 3 dm = 20 dm + 3 dm = 23 dm) para sumar racionales hay que expresar antes las fracciones que los representan con un mismo denominador; entonces, la suma es la fracción que se obtiene sumando numeradores y colocando el mismo denominador. De hecho, la regla dada en la ficha A/6 contiene esos dos pasos: $\frac{11}{24}+\frac{5}{36}=\frac{11\cdot 36}{24\cdot 36}+\frac{5\cdot 24}{24\cdot 36}=\frac{396+120}{864}=$ $=\frac{516}{864}=\frac{43}{72}$; pero utiliza como denominador común el producto de los denominadores, cuando podría utilizarse uno más pequeño tomando el M.C.M. de ambos; en este caso, 72, pues $72 = 24\cdot 3$ y $72 = 36\cdot 2$, y se tiene $\frac{11}{24}+\frac{5}{36}=\frac{11\cdot 3}{24\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{36\cdot 2}=\frac{33+10}{72}=\frac{43}{72}$, siendo el proceso mucho más corto.

(*b*) Según la definición de producto, $\frac{22}{45}\cdot 25\cdot\frac{21}{20}=\frac{22}{45}\cdot\frac{25}{1}\cdot\frac{21}{20}=\frac{22\cdot 25\cdot 21}{45\cdot 1\cdot 20}$. Como ahora deberían hacerse los productos y luego descomponer el numerador y denominador resultantes para simplificar el resultado, es mucho más operativo no hacer tales productos, descomponer sus factores y efectuar directamente la simplificación; o sea, proceder así: $\frac{22}{45}\cdot 25\cdot\frac{21}{20}=\frac{22\cdot 25\cdot 21}{45\cdot 20}=$ $=\frac{2\cdot 11\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=\frac{11\cdot 7}{3\cdot 2}=\frac{77}{6}$.

(*c*) $\frac{3/7}{5}$ representa la división de $\frac{3}{7}$ por 5. Recordando que «dividir es multiplicar por el inverso», se tiene que $\frac{3/7}{5}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{35}$.

Ejercicio A/7-1. Obténgase las aproximaciones decimales por defecto y por exceso, de orden 12, del número $\frac{13}{44}$.

Más abajo se ha hecho la división que convierte este número en decimal, según la cual $\frac{13}{44}=0{,}29\overline{54}$. Por tanto, las aproximaciones pedidas son 0,295454545454 y 0,295454545455.

```
130   |44
420    0,295454...
 240
  200
  240...
```

Ejercicio A/7-2. Conviértase en racional el decimal periódico 0,0361.

Sea x ese número, esto es, $x = 0{,}03616161\ldots$ Observemos los valores de $10x$, $100x$, $1000x$, etc., respectivamente $10x = 0{,}361616161\ldots$, $100x = 3{,}61616161\ldots$, etc. Por la colocación de las cifras, se ve que al restar $100x$ y x se eliminan «infinitas cifras» de ambos, esto es, $100x - x = 3{,}58$. De ahí se deduce que $99x = 3{,}58$, luego $x=\frac{3{,}58}{99}=\frac{358}{9900}=\frac{179}{4950}$, y ya está convertido en fracción.

Ejercicio A/8-1. Obténgase $\sqrt{2}+\pi$ con tres cifras decimales exactas sabiendo que $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ y $\pi = 3{,}14159\ldots$

De los datos se sigue que $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$ y $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$, luego $1{,}4142 + 3{,}1415 <$ $< \sqrt{2}+\pi < 1{,}4143 + 3{,}1416$, es decir, $4{,}5557 < \sqrt{2}+\pi < 4{,}5559$; por tanto, $\sqrt{2}+\pi \simeq 4{,}555$, donde los tres decimales escritos son exactos.

Ejercicio A/8-2. Calcúlese: (*a*) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$, (*b*) $8^{1/3}$.

(*a*) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}}=\frac{1}{-\frac{64}{27}}=-\frac{27}{64}$. (*b*) $8^{1/3}=\sqrt[3]{8}=2$, pues $2^3 = 8$.

Ejercicio A/8-3. Escríbanse como una sola potencia de x las expresiones siguientes:
(*a*) $\frac{x^3\cdot(x^2)^2}{x^9}$, (*b*) $\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}$

(*a*) $\frac{x^3\cdot(x^2)^2}{x^9}=\frac{x^3\cdot x^4}{x^9}=\frac{x^7}{x^9}=x^{7-9}=x^{-2}$, aplicando P3, P1 y P2, por ese orden.
(*b*) $\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}=\left(x^2\cdot\sqrt{x}\right)^{1/3}=(x^2\cdot x^{1/2})^{1/3}=(x^{5/2})^{1/3}=x^{5/6}$, aplicando dos veces la definición de exponente fraccionario y P1 y P3, por ese orden.
También puede hacerse así: $\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[2]{x}}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^5}=x^{5/6}$. Se ha aplicado R1, R3, R4, R1 y P1, la definición de exponente fraccionario.

Ejercicio A/8-4. Desarróllese la expresión $(2x + 3)^4$.

Aplicaremos la fórmula del Binomio de Newton, tomando $a = 2x$ y $b = 3$. Los números $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ valen, respectivamente, 1, 4, 6, 4, 1, luego $(2x + 3)^4 = 1\cdot(2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 3 + 6\cdot(2x)^2\cdot$ $\cdot 3^2 + 4\cdot 2x\cdot 3^3 + 1\cdot 3^4 = 1\cdot 16\cdot x^4 + 4\cdot 8x^3\cdot 3 + 6\cdot 4x^2\cdot 9 + 4\cdot 2x\cdot 27 + 81 = 16x^4 + 96x^3 +$ $+ 216x^2 + 216x + 81$.

Ejercicio A/8-5. Hállese el cuarto término del desarrollo de $(1 - 2x)^9$.

Aplicaremos la fórmula del Binomio de Newton con $a = 1$ y $b = -2x$. El desarrollo empieza así: $\binom{9}{0}a^9+\binom{9}{1}a^8b+\ldots$, luego el cuarto término es $\binom{9}{3}\cdot 1^6\cdot(-2x)^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1\cdot(-2)^3\cdot x^3 = 3\cdot 4\cdot$ $\cdot 7\cdot 1\cdot(-8)\cdot x^3 = -672\cdot x^3$.

Ejercicio A/9-1. El p.v.p. (precio de venta al público) de un automóvil es el p.f.f. (precio franco fábrica) más el 12% de i.v.a. (impuesto sobre el valor añadido). Calcular el p.f.f. de un coche que costó 1.567.789 ptas.

El p.v.p. es el 100% + 12% = 112% del p.f.f. Por tanto, aplicamos la siguiente regla de tres (simple y directa):

112% ——— 1.567.789 ptas.
100% ——— x

$\rightarrow x=\frac{100\cdot 1.567.789}{112}\approx 1.399.812$ ptas.

Ejercicio A/9-2. Un agricultor tiene 420 ovejas y una provisión de piensos para 60 días. ¿Cuántas ovejas habría de tener para poder alimentarlas 12 días más?

Esta vez se trata de una regla de tres inversa, ya que deberá tener menos ovejas para que los piensos le duren más:

420 ovejas ——— 60 días
x ——— 72 días

$\rightarrow x=\frac{420\cdot 60}{72}=350$ ovejas.

Ejercicio A/9-3. Un contratista empleó 9 obreros durante 18 días, en hacer un muro de 30 m de largo. ¿Cuántos obreros necesitará para hacer un muro de 60 m en 27 días? (Se supone que ambos muros tienen la misma dificultad y que los obreros tienen igual destreza y trabajan el mismo número de horas por día).

Se trata de un problema de regla de tres compuesta. Para resolverlo se disponen los datos como en una regla de tres simple y se compara cada una de las magnitudes con la que contiene la incógnita, a fin de averiguar si son directa o inversamente proporcionales, escribiendo sobre los datos una *d* o una *i*, según el caso. El valor de *x* es igual al cociente de dos productos. En el numerador se coloca el dato que está en la misma columna de *x*. Si una columna está marcada con una *d*, el dato que figura en la fila de *x* se coloca en el numerador y el otro dato en el denominador. Si está marcada con una *i*, se coloca al revés.

	i	*d*
9 obreros	18 días	30 m
x	27 días	60 m

$$\rightarrow x = \frac{9 \cdot 18 \cdot 60}{27 \cdot 30} = 12 \text{ obreros.}$$

Ejercicio A/9-4. Tres socios, Alfredo, Blas y Joaquín, obtienen 120.000 ptas. de beneficio en un negocio. Deciden repartirse el dinero de acuerdo con lo que cada uno invirtió: 35.000 ptas., 21.000 ptas. y 14.000 ptas., respectivamente. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
Se trata de un problema de *repartimiento proporcional directo* (o *prorrateo*). Sean x, y, z las cantidades que les corresponden, respectivamente. Estas cantidades han de ser directamente proporcionales a 35.000, 21.000 y 14.000 o, equivalentemente, a 35, 21 y 14 (dividiendo por 1.000) e, incluso, a 5, 3 y 2 (dividiendo por 7). Luego, según la propiedad característica de las magnitudes directamente proporcionales, llamando t al cociente constante, tenemos: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = t \rightarrow x = 5t$, $y = 3t$, $z = 2t$ y como $x + y + z = 120.000$, resulta $5t + 3t + 2t = 120.000$, $10t = 120.000$, $t = 12.000$, $x = 5 \cdot 12.000 = 60.000$, $y = 3 \cdot 12.000 = 36.000$, $z = 2 \cdot 12.000 = 24.000$. Luego, a Alfredo le corresponden 60.000 ptas., a Blas 36.000 ptas. y a Joaquín 24.000 ptas.

Ejercicio A/9-5. Tres socios, Víctor, Carlos y Akira, realizaron un negocio que les rindió un beneficio neto de 600.000 ptas. Víctor invirtió 200.000 ptas. y las retiró al cabo de 6 meses. Carlos puso 400.000 ptas. que recuperó 2 meses después que Víctor. Akira participó con 300.000 ptas. durante todo el tiempo que duró la operación: un año. ¿Qué parte del beneficio le corresponde a cada uno?

Se trata de un problema de *regla de compañía*. Los beneficios (o las pérdidas) deben repartirse en proporción directa de los productos de los capitales aportados por los respectivos tiempos: $200.000 \cdot 6 = 1.200.000$, $400.000 \cdot 8 = 3.200.000$ y $300.000 \cdot 12 = 3.600.000$. Sean x, y, z las partes; entonces:

$$\frac{x}{1.200.000} = \frac{y}{3.200.000} = \frac{z}{3.600.000}.$$

Dividiendo por el M.C.D. de los tres números, que es 400.000, resulta:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9} = t \rightarrow x = 3t,\ y = 8t,\ z = 9t$$

y como $x + y + z = 600.000$, tenemos: $3t + 8t + 9t = 600.000 \rightarrow t = 30.000$, de donde tenemos: $x = 3 \cdot 30.000 = 90.000$, $y = 8 \cdot 30.000 = 240.000$, $z = 9 \cdot 30.000 = 270.000$. Luego, a Víctor le corresponden 90.000 ptas., a Carlos 240.000 ptas. y a Akira 270.000 ptas.

Ejercicio A/9-6. Una herencia de 118 millones de pesetas debe repartirse, según el testamento, en razón inversa de las edades de los herederos: Argimiro, Fernando y Pablo, cuyas respectivas edades son 25, 30 y 40. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Se trata de un problema de *repartimiento proporcional inverso*. Sean x, y, z las partes respectivas. Entonces, por la propiedad característica de las magnitudes inversamente proporcionales, tenemos:

$$25x = 30y = 40z \rightarrow 5x = 6y = 8z \rightarrow \frac{x}{1/5} = \frac{y}{1/6} = \frac{z}{1/8} \rightarrow \frac{x}{24/120} = \frac{y}{20/120} = \frac{z}{15/120} \rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = t \rightarrow$$

$x = 24t$, $y = 20t$, $z = 15t$ y como $x + y + z = 118.000.000$, resulta: $24t + 20t + 15t = 118.000.000$, $t = 2.000.000$, de donde $x = 24 \cdot 2.000.000 = 48.000.000$, $y = 20 \cdot 2.000.000 = 40.000.000$, $z = 15 \cdot 2.000.000 = 30.000.000$. Luego, a Argimiro le corresponden 48 millones, a Fernando 40 millones y a Pablo 30 millones.

Ejercicio A/10-1. Calcular el valor de a para que el polinomio $p(x) = 2x^3 + 3ax^2 - 2ax - 12$ sea divisible por $x + 3$.

Según el teorema del resto, ha de ser $p(-3) = 0$. Por tanto, $p(-3) = 2(-3)^3 + 3a(-3)^2 - 2a(-3) - 12 = 0$, $33a - 66 = 0$, $a = 2$.

Ejercicio A/10-2. Al dividir un polinomio $p(x)$ por $x + 2$ se obtiene un resto de 79. En cambio, al dividirlo por $x - 1$ el resto es -2. Con estos datos, ¿es posible calcular el resto de la división de $p(x)$ por $x^2 + x - 2$?

En primer lugar, observemos que $x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1)$. Como el resto ha de ser de grado menor que el divisor, debe ser de la forma $r(x) = ax + b$. Sea $c(x)$ el cociente; entonces: $P(x) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot c(x) + (ax + b)$. En virtud del teorema del resto se verifica: $p(-2) = (-3) \cdot 0 \cdot c(-2) + (-2a + b) = 79$ y $p(1) = 0 \cdot 3 \cdot c(1) + (a + b) = -2$. De aquí resulta un sistema de ecuaciones que se resuelve sin dificultad, siendo su solución: $a = -27$ y $b = 25$. Luego, el resto es $-27x + 25$.

Ejercicio A/10-3. Simplificar las siguientes fracciones polinómicas:

$$(a)\ \frac{(x+3)^2}{x^2-9},\quad (b)\ \frac{x^2-4}{x^3+8},\quad (c)\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6},\quad (d)\ \frac{x^4-1}{x^6-1}.$$

Las fracciones polinómicas se simplifican descomponiendo en factores el numerador y el denominador, para así cancelar los factores iguales. Para ello, conviene tener presentes las siguientes fórmulas, llamadas *productos notables:* $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

$$(a)\ \frac{(x+3)^2}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{x^2-3^2} = \frac{(x+3)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}.$$

$$(b)\ \frac{x^2-4}{x^3+8} = \frac{x^2-2^2}{x^3-2^3} = \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)} = \frac{x-2}{x^2-2x+4}.$$

$$(c)\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}.$$

$$(d)\ \frac{x^4-1}{x^6-1} = \frac{(x^2)^2-1}{(x^3)^2-1} = \frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{(x^3+1)\cdot(x^3-1)} = \frac{(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}.$$

$$= \frac{x^2+1}{(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)} = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

Ejercicio A/11-1. Resolver la ecuación $4 - (5x + 15) = 3 \cdot [4x - 2 \cdot (9 - x) - 9]$.

$4 - 5x - 15 = 3 \cdot [4x - 18 + 2x - 9] \rightarrow -5x - 11 = 3 \cdot [6x - 27] \rightarrow -5x - 11 = 18x - 81 \rightarrow -23x = -70 \rightarrow x = 70/23$.

Ejercicio A/11-2. Resolver la ecuación $\frac{2\cdot(3x-2)}{5} - \frac{3\cdot(4-5x)}{2} = \frac{x}{10}$.

$$\frac{4\cdot(3x-2)}{10} - \frac{15\cdot(4-5x)}{10} = \frac{x}{10} \rightarrow \frac{12x - 8 - (60 - 75x)}{10} = \frac{x}{10} \rightarrow$$

$12x - 8 - 60 + 75x = x \rightarrow 86x = 68 \rightarrow x = 68/86 = 34/43$.

Ejercicio A/11-3. Resolver la ecuación $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = 53$.

Recordemos las fórmulas del cuadrado de una suma y de una resta: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Aplicando estas fórmulas, tenemos: $(x^2 + 6x + 9) + (x^2 - 4x + 4) = 53 \rightarrow 2x^2 + 2x - 40 = 0 \rightarrow x^2 + x - 20 = 0$. Finalmente, resolviendo esta ecuación, resulta $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$.

Ejercicio A/11-4. Hallar a para que sean iguales las dos soluciones de la ecuación $x^2 - ax + a = 0$.

El discriminante de la ecuación debe ser 0: $a^2 - 4a = 0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado, resulta $a_1 = 0$ y $a_2 = 4$.

Ejercicio A/11-5. Calcular c para que las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x + c = 0$ sean una el doble de la otra.

Sean x_1 y x_2 las soluciones. Entonces $x_1 + x_2 = -(-9)/1 = 9$, y como $x_1 = 2x_2$, resulta $2x_2 + x_2 = 9$, de donde $x_2 = 3$ y $x_1 = 6$. Por otra parte, como $x_1 \cdot x_2 = c/1$, tenemos que $c = 6 \cdot 3 = 18$.

Ejercicio A/12-1. Un obrero gana 2.400 ptas. diarias, pero debe abonar 1.200 ptas. por cada día que falte al trabajo. Al cabo de 58 días recibe 88.800 ptas. ¿Cuántos días ha trabajado y cuántos ha faltado?

Sea x el número de días que ha trabajado y sea y el número de días que ha faltado. Entonces, $\begin{cases} x + y = 58 \\ 2.400x - 1.200y = 88.800 \end{cases}$. Resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $y = 58 - x$, $2.400x - 1.200 \cdot (58 - x) = 88.800 \rightarrow 2.400x - 69.600 + 1.200x = 88.800 \rightarrow 3.600x = 158.400 \rightarrow x = 158.400/3.600 = 44$, $y = 58 - 44 = 14$. Luego, trabajó 44 días y faltó 14.

Ejercicio A/12-2. Dos grifos, manando juntos, llenan un depósito en 7 horas. Uno de ellos lo llenaría en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría el otro en llenarlo?

Sea x el tiempo pedido. El primer grifo llena en un hora 1/12 de depósito y el otro $1/x$. Manando juntos, en una hora llenan 1/7. Luego,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{7} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{7} - \frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{84} \rightarrow x = \frac{84}{5}.$$

El segundo grifo tardaría 84/5 = 16,8 horas, es decir, 16 h 48^{m}.

Ejercicio A/12-3. Si se mezclan 6 litros de vino de cierta clase con 3 de otra, se obtiene una mezcla que vale 100 ptas. por litro. Pero si se mezclan 4 litros de la primera con 6 de la segunda, la nueva mezcla vale 3,20 ptas. más por litro. ¿Cuánto vale el litro de cada uno de los vinos?

Sean x e y los respectivos precios por litro. Entonces,

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= (6 + 3) \cdot 100 = 900 \\ 4x + 6y &= (4 + 6) \cdot 103{,}2 = 1.032 \end{aligned}$$

Resolvamos el sistema por el método de reducción. Para ello, multipliquemos la primera ecuación por -2 y sumémosla a la segunda:

$$\begin{array}{r} -12x - 6y = -1.800 \\ 4x + 6y = 1.032 \\ \hline -8x \qquad = -768 \end{array} \rightarrow x = 768/8 = 96$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación, obtenemos el valor de y. Será $6 \cdot 96 + 3y = 900$; $3y = 324$; $y = 324/3 = 108$. Luego, los precios por litro son 96 ptas. y 108 ptas., respectivamente.

Ejercicio A/12-4. Marina y Dolores parten de A, en moto, a las 8 de la mañana y convienen en encontrarse en B, a 200 km de A. Sabiendo que Marina va a 10 km/h más que Dolores y llega una hora antes, se pide la velocidad de cada una.

Sean x e y las respectivas velocidades, en km/h, de Marina y Dolores. Entonces x = y + 10. Dado que el tiempo es igual al espacio dividido por la velocidad, y teniendo en cuenta que Dolores llega una hora después que Marina, resulta la ecuación:

$$\frac{200}{y + 10} = \frac{200}{y} + 1 \rightarrow \frac{200}{y + 10} = \frac{200 + y}{y} \rightarrow$$

$200y = (200 + y) \cdot (y + 10) \rightarrow y^2 + 10y + 2.000 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 40 y -50. Desechamos la segunda, por ser negativa. Luego, Dolores va a 40 km/h y Marina a 40 + 10 = 50 km/h.

Ejercicio A/12-5. Dos obreros, trabajando juntos, realizan una obra en 18 días. ¿Cuánto tardaría en realizarla cada uno, por separado, sabiendo que el primero tardaría 27 días más que el otro?

Sean x e y los tiempos pedidos (en días). Ambos hacen en un día 1/18 de la obra, de los que corresponden $1/x$ al primero y $1/y$ al segundo. Pero como $x = y + 27$, resulta:

$$\frac{1}{y + 27} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \rightarrow \frac{y + y + 27}{(y + 27) \cdot y} = \frac{1}{18} \rightarrow$$

$18 \cdot (2y + 27) = y^2 + 27y \rightarrow y^2 - 9y - 468 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 27 y -18; desechamos la segunda por carecer de sentido. Luego, el primero tardaría 27 + 27 = 54 días y el segundo 27 días.

Ejercicio A/13-1. Resolver la ecuación $p(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 16x + 16 = 0$.

Las posibles soluciones enteras son los divisores de 16: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 y ± 16. Sustituyendo $x = 1$ vemos que no es solución, en cambio sustituyendo $x = -1$ notamos que sí es solución. Aplicando la regla de Ruffini (ver A/11 y A/14) el cociente da la ecuación $x^4 + 8x^2 + 16 = 0$. Insistimos una vez más para ver si $x = -1$ también es solución, y resulta que no lo es. Probemos $x = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -8 & 0 & 16 \\ 2) & & 1 & 2 & 4 & -8 \; -16 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & -8 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = 2 \text{ es solución}$$

Probando nuevamente $x = 2$ con la ecuación que da el cociente: $x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$; resulta que $x = 2$ es una solución doble. El cociente de la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ que se resuelve por la fórmula de las ecuaciones de segundo grado y resulta tener dos soluciones iguales a -2. Luego, las soluciones de la ecuación propuesta son: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ y $x_5 = -2$.

Ejercicio A/13-2. Resolver la ecuación $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x^2 + 3x + 2}{(x - 1)^2} = \dfrac{3 \cdot (x + 1)}{x^2 - 2x + 1}$.

Teniendo en cuenta que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, demos común denominador a $(x - 1)^2$ en ambos miembros:

$$\frac{(x - 1) \cdot (x + 1) + (x^2 + 3x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{3x + 3}{(x - 1)^2}.$$

Eliminando denominadores, es decir, multiplicando ambos miembros por $(x - 1)^2$: $x^2 - 1 + x^2 + 3x + 2 = 3x + 3 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$. Comprobemos las soluciones obtenidas. En primer lugar, $x = 1$ no satisface la ecuación, pues da 0 en los denominadores (la división por 0 no está permitida). En cambio, $x = -1$ sí satisface la ecuación. Luego la ecuación sólo admite una solución: $x = -1$.

Ejercicio A/13-3. Resolver la ecuación $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$.

Aislando el primer radical y elevando ambos miembros al cuadrado: $(\sqrt{2x + 3})^2 = (\sqrt{x - 2} + 2)^2 \rightarrow 2x + 3 = x - 2 + 4\sqrt{x - 2} + 4$. Repitamos el proceso con el radical que queda: $(4\sqrt{x - 2})^2 = (x + 1)^2 \rightarrow 16(x - 2) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 11 y 3. Comprobémoslas en la ecuación propuesta: $x = 11 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 11 + 3} - \sqrt{11 - 2} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$; $x = 3 : \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - \sqrt{3 - 2} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$. Ambos números satisfacen la ecuación; luego las soluciones son $x_1 = 11$ y $x_2 = 3$.

Ejercicio A/13-4. Resolver la ecuación $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} = 1$.

Procedamos como en el ejercicio anterior: $(\sqrt{x + 2})^2 = (1 - \sqrt{x - 3})^2 \rightarrow x + 2 = 1 - 2\sqrt{x - 3} + x - 3 \rightarrow 2\sqrt{x - 3} = -4 \rightarrow \sqrt{x - 3} = -2 \rightarrow x - 3 = 4 \rightarrow x = 7$. Comprobemos esta solución: $\sqrt{7 + 2} + \sqrt{7 - 3} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5 \neq 1$. Luego la ecuación propuesta carece de solución.

Ejercicio A/13-5. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2x} - 2$.

Elevando al cubo ambos miembros se obtiene: $x = 2x \cdot \sqrt{2x} - 12x + 12\sqrt{2x} - 8 \rightarrow 13x + 8 = (2x + 12)\sqrt{2x}$. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta: $169x^2 + 208x + 64 = (4x^2 + 48x + 144) \cdot 2x \rightarrow 8x^3 - 73x^2 + 80x - 64 = 0$. Por tanteos, aplicando la regla de Ruffini, se obtiene $x = 8$, que satisface la ecuación, y $8x^2 - 9x + 8 = 0$, que no tiene solución. Por lo tanto, la solución $x = 8$ es única.

Ejercicio A/14-1. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{2x-3}{4} + \frac{y-8}{5} = \frac{y+3}{4}, \qquad \frac{x-7}{3} + \frac{4y+1}{11} = 3.$$

Simplifiquemos ambas ecuaciones:

$$\frac{5(2x-3) + 4(y-8)}{20} = \frac{5(y+3)}{20} \rightarrow 10x - 15 + 4y - 32 = 5y + 15 \rightarrow 10x - y = 62$$

$$\frac{11(x-7) + 3(4y+1)}{33} = 3 \rightarrow 11x - 77 + 12y + 3 = 3 \cdot 33 \rightarrow 11x + 12y = 173$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $y = 10x - 62$; $11x + 12(10x - 62) = 173$; $11x + 120x - 744 = 173$; $131x = 917$; $x = 917/131 = 7$; $y = 10 \cdot 7 - 62 = 8$. La solución del sistema es, pues, $x = 7$, $y = 8$.

Ejercicio A/14-2. Resolver el sistema de segundo grado $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 6 \\ 2x^2 + 2y^2 + y = 12 \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándola a la segunda se obtiene $-2x + y = 0$, es decir, $y = 2x$. Sustituyendo en la primera ecuación, resulta: $x^2 + (2x)^2 + x = 6 \rightarrow 5x^2 + x - 6 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son 1 y –1,2. Luego, las soluciones del sistema son $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ y $x_2 = -1{,}2$, $y_2 = -2{,}4$.

Ejercicio A/14-3. Resolver el sistema de segundo grado $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ (x + y)^2 = 49 \end{cases}$

Desarrollando la segunda ecuación se obtiene $x^2 + 2xy + y^2 = 49$, y como $x^2 + y^2 = 169$, tenemos $2xy + 169 = 49$; $2xy = -120$. Restamos este resultado a la primera ecuación: $x^2 + y^2 - 2xy = 169 - (-120)$. Pero el primer miembro es igual a $(x - y)^2$, de donde se obtiene $(x - y)^2, = 289$. De la segunda ecuación del sistema resulta $x + y = \pm\sqrt{49} = \pm 7$ y de la última ecuación obtenida resulta: $x - y = \pm\sqrt{289} = \pm 17$. En definitiva, pues, tenemos 4 sistemas de primer grado con dos incógnitas (tantas como combinaciones de signos + y –). Por ejemplo, tomando + en la primera ecuación y – en la segunda, resulta el sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -17 \end{cases}$ cuya solución es $x_1 = -5$, $y_1 = 12$. Las otras soluciones son: $x_2 = 12$, $y_2 = -5$ (signos + y +), $x_3 = 5$, $y_3 = -12$ (signos – y +) y $x_4 = -12$, $y_4 = 5$ (signos – y –).

Ejercicio A/15-1. Resolver los sistemas: (*a*) $\begin{cases} 5x - 3 \le 7 \\ 3 - 2x \le 1 \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} 5x - 3 \le 7 \\ 9 - 2x \le 1 \end{cases}$

Empecemos resolviendo por separado las inecuaciones de cada sistema:

$5x - 3 \le 7 \Leftrightarrow 5x \le 10 \Leftrightarrow x \le 2$ (Conjunto solución: $S_1 = [-\infty, 2]$).
$3 - 2x \le 1 \Leftrightarrow -2x \le -2 \Leftrightarrow x \ge 1$ (Conjunto solución: $S_2 = [1, +\infty]$).
$9 - 2x \le 1 \Leftrightarrow -2x \le -10 \Leftrightarrow x \ge 5$ (Conjunto solución: $S_3 = [5, +\infty]$).

Las soluciones del sistema (*a*) son los números reales del conjunto $S_1 \cap S_2 = [1, 2]$ (intervalo cerrado), o sea, números como 1, 1,1, 1,2, $\sqrt{2}$, ..., 2. Las soluciones de (*b*) son los números del conjunto $S_1 \cap S_3$; pero, $S_1 \cap S_3 = \varnothing$, luego no tiene soluciones: es *incompatible.*

Ejercicio A/15-2. Se quieren obtener 120 litros de vino no superior a 75 ptas./litro, mezclando vino de 50 ptas./litro, del que se tienen 60 litros, con vino de 90 ptas./litro, del que se tienen 100 litros. ¿Cómo puede hacerse la mezcla?

Si se toman x litros del vino más barato, deben tomarse $120 - x$ del más caro, y el coste de toda la mezcla, en pesetas, será $50 \cdot x + 90 \cdot (120 - x)$, por lo que deberá cumplirse $50 \cdot x + 90 \cdot (120 - x) \le 75 \cdot 120$ (1).
También debe cumplirse $x \le 60$ (2) y $120 - x \le 100$ (3). Las soluciones de (1), (2) y (3) son, respectivamente, $S_1 = [45, +\infty)$, $S_2 = (-\infty, 60]$, $S_3 = [120, +\infty)$; luego, la solución del problema es $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [45, 60]$.
El resultado se interpreta diciendo que pueden utilizarse desde 45 litros de vino más barato (y 75 del más caro), hasta 60 litros del barato (y 60 del caro). El precio de la mezcla se hallará entre 70 y 75 ptas./litro (compruébese).

Ejercicio A/16-1. Los términos cuarto y noveno de una progresión aritmética valen 16 y 41, respectivamente. Calcular el término general y el que ocupa el lugar decimoquinto.

Sea $a_n = a \cdot n + b$ el término general. Entonces, $a_4 = 4a + b = 16$ y $a_9 = 9a + b = 41$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, resulta $a = 5$ y $b = -4$. Luego, el término general es $a_n = 5n - 4$ y $a_{15} = 5 \cdot 15 - 4 = 71$.

Ejercicio A/16-2. Interpolar cuatro términos entre –5 y 65.

Hay que formar una progresión aritmética en la que $a_1 = -5$ y $a_6 = 65$. Sea $a_n = a \cdot n + b$ el término general. Entonces, $a_1 = a + b = -5$ y $a_6 = 6a + b = 65$. Restando ambas ecuaciones, resulta $5a = 70$, de donde la diferencia es $a = 14$. Luego, los términos pedidos son: $-5 + 14 = 9$, $9 + 14 = 23$, $23 + 14 = 37$ y $37 + 14 = 51$.

Ejercicio A/16-3. Calcular la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que los términos primero y tercero suman 4 y que la diferencia entre el doble del cuarto y el triple del séptimo es 53.

Sea $a_n = a \cdot n + b$ el término general. Entonces, $a_1 + a_3 = (a + b) + (3a + b) = 4a + 2b = 4$ y $2a_4 - 3a_7 = 2(4a + b) - 3(7a + b) = -13a - b = 53$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, resulta $a = -5$ y $b = 12$. Luego, el término general es $a_n = -5n + 12$. Para calcular la suma de los 20 primeros términos, hemos de calcular $a_1 = -5 + 12 = 7$ y $a_{20} = -5 \cdot 20 + 12 = -88$. La suma pedida es $S_{20} = \dfrac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 10\,(7 - 88) = -810$.

Ejercicio A/16-4. En una progresión geométrica los términos cuarto y séptimo son 48 y 6, respectivamente. Calcular el término general, la suma y el producto de los 10 primeros términos, y la suma total de la progresión.

Sea $a_n = a \cdot r^n$ el término general. Entonces $a_4 = a \cdot r^4 = 48$ y $a_7 = a \cdot r^7 = 6$. Dividamos la segunda ecuación por la primera: $\dfrac{a \cdot r^7}{a \cdot r^4} = \dfrac{6}{48} \rightarrow r^3 = \dfrac{1}{8} \rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}$; $r = 1/2$, $a = 48/r^4 = 48/(1/2)^4 = 48 \cdot 16 = 768$. El término general es, pues, $a_n = 768 \cdot (1/2)^n$. El producto de los 10 primeros términos es $p_{10} = 768^{10} \cdot (1/2)^{55}$ $(55 = 10 \cdot (10 + 1)/2)$. Pero $768 = 3 \cdot 256 = 3 \cdot 2^8$, de donde $p_{10} = 3^{10} \cdot 2^{80}/2^{55} = 3^{10} \cdot 2^{25} = 1.981.355.655.168$. La suma de los 10 primeros términos es $s_{10} = \dfrac{a_1 - r \cdot a_{10}}{1 - r} = \dfrac{768 \cdot (1/2) \cdot [1 - (1/2)^{10}]}{1 - (1/2)} = 767{,}25$. La suma total es $\dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{768 \cdot (1/2)}{1 - (1/2)} = 768$.

Ejercicio A/17-1. ¿Qué capital se ha de imponer al 8% de interés simple para que rinda un beneficio de 10.000 ptas. en un año?

$$10.000 = \frac{C \cdot 8 \cdot 1}{100} \rightarrow C = \frac{10.000 \cdot 100}{8} = 125.000 \text{ ptas.}$$

Ejercicio A/17-2. ¿A qué tasa de interés compuesto hay que colocar un capital para que en 3 años, capitalizando intereses cada 6 meses, aumente en un 50%?

Como la unidad de tiempo es el semestre, $T = 6$ (3 años = 6 semestres). Hemos de calcular $r = \sqrt[6]{M/C} - 1$. Pero, $M = C + 0{,}5 \cdot C = 1{,}5 \cdot C$, de donde $M/C = 1{,}5$. Luego, $r = \sqrt[6]{1{,}5} - 1 = 1{,}07 - 1 = 0{,}07$. Por otra parte, $r = R \cdot f/100$ y como la unidad es el semestre, $f = 1/2$, de donde resulta $R = 100 \cdot r/f = 14$. Por tanto, la tasa de interés ha de ser del 14%.

Ejercicio A/17-3. Supongamos que necesitamos un millón de pesetas que podemos obtener de un banco a una tasa de interés compuesto del 16% (anual). Los intereses se capitalizan cada tres meses y las cuotas de amortización se pagan también cada tres meses. Si no podemos ahorrar más de 30.000 ptas. mensuales, ¿cuánto tiempo tardaríamos en amortizar la deuda?

Hemos de calcular t a partir de la fórmula $c = \dfrac{D \cdot r \cdot (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$ donde $D = 1.000.000$, $c = 3 \cdot 30.000 = 90.000$ y $r = R \cdot f/100 = 16 \cdot 1/4 \cdot 1/100 = 0{,}04$. Sustituyendo, tenemos $90.000 = \dfrac{1.000.000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^t}{1{,}04^t - 1} \rightarrow 9 \cdot (1{,}04^t - 1) = 4 \cdot 1{,}04^t \rightarrow 1{,}04^t = 9/5 = 1{,}8 \rightarrow \log (1{,}04^t) = t \cdot \log 1{,}04 = \log 1{,}8 \rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}8}{\log 1{,}04} \approx 15$. Luego tardaríamos 15 trimestres, es decir 3 años y 9 meses.

¿Importa el orden?

¿Puede haber repetición?		SÍ	NO
	NO	VARIACIONES $V_n^k = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$ PERMUTACIONES $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$	COMBINACIONES $C_n^k = \dfrac{V_n^k}{k!} = \binom{n}{k}$
	SÍ	VAR. CON REP. $VR_n^k = n^k$ PERM. CON REP. $PR^k_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \dfrac{k!}{r_1! \ldots r_n!}$	COMB. CON REP. $CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Ejercicio A/18-1. Con 7 colores, ¿cuántos banderines tricolores (tres bandas verticales) diferentes se pueden dibujar?

En primer lugar, hay que darse cuenta de que importa el orden (no es lo mismo rojo-blanco-negro que blanco-rojo-negro) y no puede haber repetición (si la hubiera, el banderín no sería tricolor). Según el cuadro, se trata de variaciones sin repetición. Por otra parte, hay 7 elementos disponibles ($n = 7$), de los que intervienen 3 ($k = 3$) en cada configuración (banderín). Luego, el número posible de banderines es $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Ejercicio A/18-2. En una clase hay 20 puestos para idéntico número de alumnos. Se decide que cada día, respecto de los anteriores, los puestos deben ocuparse de una manera diferente (dos ocupaciones son iguales si cada alumno ocupa el mismo puesto en ambas, mientras que son diferentes si hay al menos un alumno –dos en este caso– que ocupa un puesto distinto). ¿Durante cuántos días puede mantenerse esta decisión?

Hay que calcular el número de maneras de ordenar 20 objetos: $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20 = 2.432.902.008.176.640.000$ ¡unos 2,4 trillones de días!

Ejercicio A/18-3. Se ha de elegir una comisión de dos alumnos entre 10 voluntarios. ¿De cuántas maneras puede hacerse la elección?

No importa el orden porque, por ejemplo, la comisión formada por Pablo y Marina es la misma que la formada por Marina y Pablo. No puede haber repetición porque no tiene sentido una comisión formada por Natalia y Natalia (una sola persona). Por otra parte, como hay 10 elementos disponibles ($n = 10$) de los que se eligen 2 para formar una configuración ($k = 2$), el número pedido es $\binom{10}{2} = V_{10}^2/2! = 10 \cdot 9/2 = 45$.

Ejercicio A/18-4. ¿Cuántas «palabras» de 5 letras, pronunciables o no, se pueden formar con las letras que figuren en la palabra VALDESPINO?

Importa el orden porque, por ejemplo, VALDE no es igual que DEVAL. Puede haber repetición porque el enunciado no dice lo contrario ni la naturaleza del problema lo impide (una palabra puede tener letras repetidas: ADELA, por ejemplo). Es inmediato que $n = 10$ y $k = 5$. Luego, el número pedido es $VR_{10}^5 = 10^5 = 100.000$.

Ejercicio A/18-5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 4 bolas rojas, 3 negras y 2 azules, todas ellas de la misma forma y tamaño?

Importa el orden porque se trata de una ordenación y hay repetición porque hay bolas repetidas. Se trata de permutaciones con repetición (y no variaciones con repetición) porque se indica el número de veces que se repite cada elemento. El número pedido es, pues, $PR^9_{4,\,3,\,2} = \dfrac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1.260$.

Ejercicio A/18-6. ¿De cuántas fichas consta un dominó cuyos valores varían del cero doble al nueve doble?

No importa el orden porque, por ejemplo, la ficha 2-3 es la misma que la 3-2. Puede haber repetición porque hay fichas con los números repetidos. Hay 10 elementos disponibles: 0, 1, ... 9 ($n = 10$), de los que se eligen 2 ($k = 2$). Luego, el dominó tiene $CR_{10}^2 = \binom{10+2-1}{2} = V_{11}^2/2! = 55$ fichas.

Ejercicio A/18-7. Con las cifras del número 1234567, ¿cuántos números distintos, de 5 cifras, se pueden escribir de modo que las tres primeras cifras sean pares y las otras impares?

Se trata de un problema compuesto porque las configuraciones no son todos los números (variaciones con repetición) de 5 cifras que se pueden formar con 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sino sólo una parte: los que tienen impares las 3 primeras cifras y pares las 2 últimas. Las tres primeras cifras se pueden escribir de $VR_4^3 = 4^3 = 64$ maneras y las dos últimas de $VR_3^2 = 3^2 = 9$ maneras. *Tratándose de posibilidades que se presentan simultáneamente en una misma configuración, hay que multiplicar los resultados parciales (primera ley de la combinatoria).* Luego, el número pedido es: $64 \cdot 9 = 576$.

Ejercicio A/18-8. Se dispone de 6 licores diferentes y se desea preparar un cóctel mezclando partes iguales de 2 o 3 licores. ¿Cuántos cócteles diferentes se pueden preparar?

El problema es compuesto porque las configuraciones no constan del mismo número de elementos. El número de cócteles de 2 licores es $\binom{6}{2} = 15$ y el de 3 es $\binom{6}{3} = 20$. *Tratándose de posibilidades que se excluyen mutuamente, hay que sumar los resultados parciales (segunda ley de la combinatoria).* El número de cócteles es, pues, $15 + 20 = 35$.

Ejercicio A/18-9. Un apostante juega cada jornada futbolística todas las quinielas posibles con 6 o 7 variantes (X o 2). ¿Cuánto invierte cada semana, sabiendo que el coste por columna es de 20 ptas?

Calculemos, en primer lugar, el número de quinielas de 6 variantes. Las posiciones de las variantes se pueden elegir de $\binom{14}{6} = 3.003$ maneras (las restantes son unos). Las 6 variantes se pueden elegir de $VR_2^6 = 64$ maneras (2 elementos disponibles X y 2, tomados de 6 en 6). Luego, con 6 variantes hay $3.003 \cdot 64 = 192.192$ quinielas distintas. Análogamente se calcula el número de quinielas con 7 variantes: $\binom{14}{7} \cdot VR_2^7 = 3.432 \cdot 128 = 439.296$. Así, pues, con 6 o 7 variantes hay $192.192 + 439.296 = 631.488$ quinielas diferentes, que suponen una inversión de $631.488 \cdot 20 = 12.629.760$ ptas.

Ejercicio B/1-1. Expresar en unidades centesimales 32° 45′ 30″.

$$32°\,45'\,30'' = 32° + \frac{45°}{60} + \frac{30°}{3.600} = \frac{117.930°}{3.600} = \frac{117.930}{3.600} \cdot \frac{100^g}{90} \simeq 36{,}398148^g = 36^g\,39^m\,81{,}48^s$$

Ejercicio B/1-2. Expresar en unidades sexagesimales $45^g\,33^m\,68^s$.

$$45^g\,33^m\,68^s = 45{,}3368^g = \frac{45{,}3368 \cdot 90°}{100} = 40{,}80312° = 40° + (0{,}80312 \cdot 60)' =$$
$$= 40° + 48' + (0{,}1872 \cdot 60)'' = 40°\,48'\,11{,}232''$$

Ejercicio B/3-1. Dos rectas *r* y *s* son secantes a otra recta *t*. Según sea su posición relativa, discutir la pertenencia de las tres rectas a un mismo plano.

I) Existirá un único plano que contenga a *r*, *s* y *t* en los siguientes casos: (*a*) *r* y *s* son la misma recta; (*b*) *r* y *s* son secantes; (*c*) *r* y *s* son paralelas.
II) No existirá ningún plano que contenga las tres rectas en el caso en que *r* y *s* se crucen.

Ejercicio B/3-2. Una recta *t* es perpendicular a otras dos rectas *r* y *s* contenidas en un plano α. ¿Cuál puede ser la posición relativa de *t* respecto a α?

(*a*) Si *t* corta a *r* y *s* en puntos distintos, *t* estará contenida en α.
(*b*) La recta *t* y el plano α podrían ser perpendiculares.
(*c*) La recta *t* podría cortar oblicuamente a α y ser perpendicular a *r* y a *s*, paralelas entre sí.
(*d*) La recta *t* podría ser perpendicular a las rectas *r* y *s* sin, por eso, cortar al plano α, es decir, sería paralela a α.

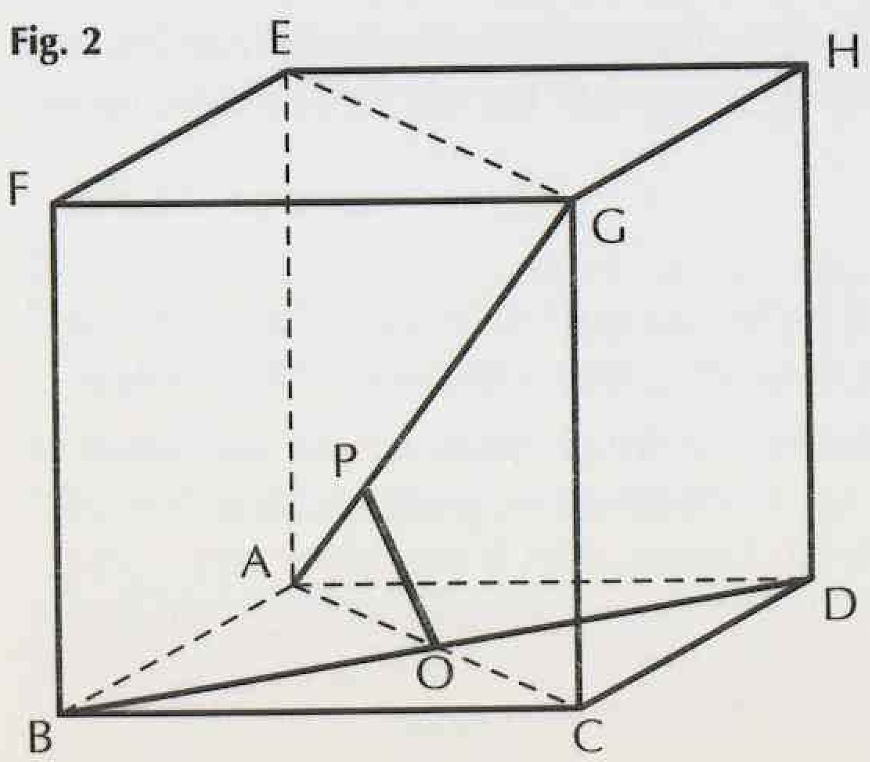
Ejercicio B/3-3. ¿Cuántos planos pasan por: 1) un punto; 2) dos puntos; 3) tres puntos no alineados; 4) tres puntos alineados; 5) cuatro puntos de los cuales no hay tres alineados?

1) Por un punto pasan infinitos planos, al conjunto de todos ellos se le llama *radiación de planos*.
2) Dos puntos determinan una recta, y existen infinitos planos que contienen a ésta, es decir, infinitos planos que pasan por los dos puntos. Al conjunto de ellos se le llama *haz de planos*.
3) Se ha dado como propiedad fundamental que por tres puntos no alineados pasa un único plano.
4) Es un caso equivalente al caso 2).
5) En general, por cuatro puntos, de los cuales no hay tres alineados, no pasa ningún plano. Obsérvese que estos cuatro puntos podrían estar contenidos, dos a dos, en sendas rectas que se cruzan.

Ejercicio B/3-4. La arista de un cubo es *a*. Hállese la distancia entre la diagonal del cubo y la diagonal de una cara que no corte a la anterior.

Sean *AG* (fig. 2) la diagonal del cubo y *BD* la diagonal de la cara. El plano determinado por los puntos *E, G, A* es perpendicular a *BD* en su punto medio *O* y contiene *AG*. Por lo tanto, el segmento *OP*, perpendicular a *AG*, estará en este plano y será perpendicular a ambas diagonales. Para calcular la longitud de *OP* –que es la distancia pedida– basta con considerar la semejanza existente entre los triángulos rectángulos *APO* y *ACG*, que tienen los ángulos iguales. En virtud de la proporcionalidad de los lados, se tendrá:

Fig. 2



$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{GC}}, \text{ es decir } \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\overline{OP}}{a},$$

$$\text{de donde } \overline{OP} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a.$$

Ejercicio B/4-1. Para trazar las tangentes a la circunferencia de centro *O* desde un punto *P*, exterior a ella, se construye la circunferencia *V* de diámetro *OP*, la cual corta a *C* en puntos *M* y *N* que son los de contacto de las tangentes buscadas (fig. 3). ¿Por qué?

Porque si *M* es punto de contacto de la tangente *MP*, ha de ser *OM* perpendicular a *MP*, pero, según el teorema de Tales de B/4, ello implica que *M* pertenece a la circunferencia de diámetro *OP*.

Ejercicio B/4-2. Relacionar la distancia entre los centros de dos circunferencias y sus radios *r* y *r′* con su posición relativa.

Puesto que $r + r' > |r - r'|$, hay cinco situaciones posibles: I) $d > r + r'$ (mutuamente exteriores), II) $d = r + r'$ (tangentes exteriormente), III) $|r - r'| < d < r + r'$ (secantes), IV) $|r - r'| = d$ (una es tangente interior a la otra), V) $d < |r - r'|$ (una interna a la otra sin cortarla).

Ejercicio B/4-3. Se tiene una corona circular formada por dos circunferencias de radios 5 y 13 cm. Determinar la longitud de una cuerda de la mayor, tangente a la menor.

Sea *s* la mitad de tal cuerda. Aplicando el teorema de Pitágoras (fig. 4), se obtiene $s^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, luego $s = 12$ y la cuerda buscada mide 24 cm.

Ejercicio B/4-4. Se traza desde un punto *P* una tangente a una circunferencia de radio 3 cm. La porción de tangente entre *P* y el punto de contacto mide 4 cm. ¿A qué distancia de *P* está el punto de la circunferencia que le es más cercano?

La distancia de *P* al centro es $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, luego la distancia buscada es $5 - 3 = 2$ (fig. 5).

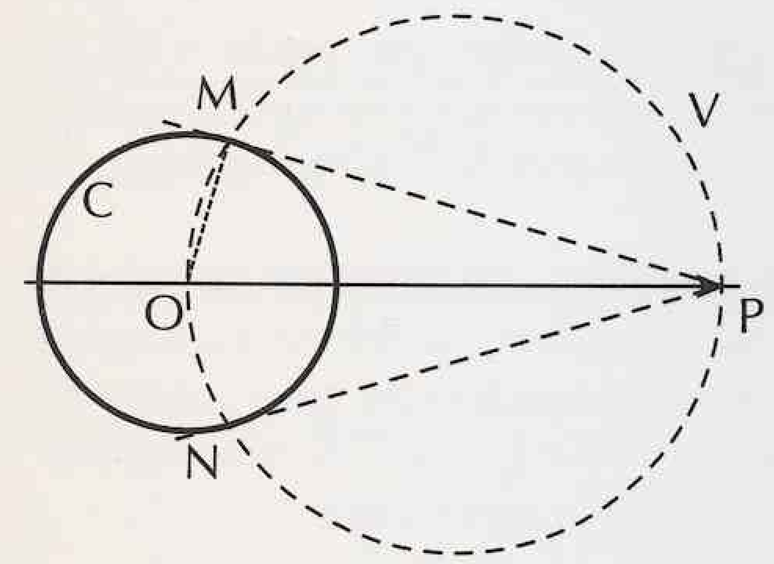


Fig. 3

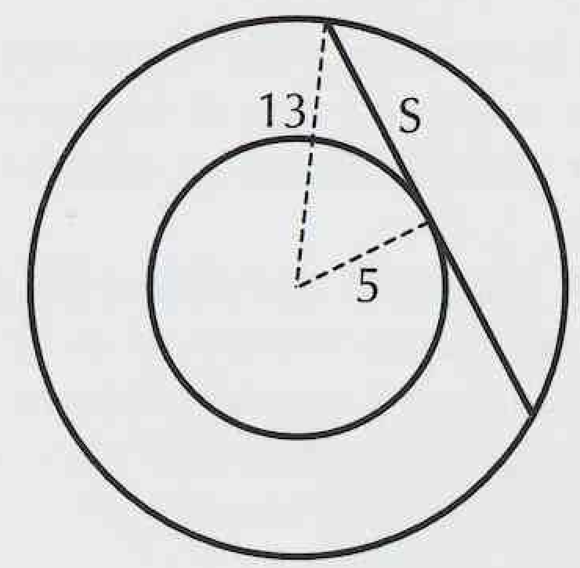


Fig. 4

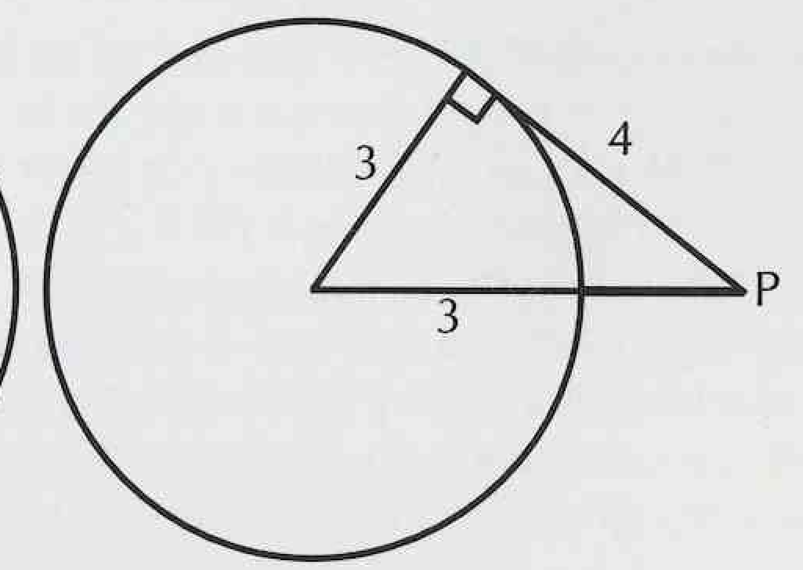


Fig. 5

Ejercicio B/4-5. La rueda delantera de un carruaje tiene un radio de 18 cm y la trasera de 25 cm. En un viaje la primera ha dado 1.500 vueltas más que la segunda. ¿Cuál es la longitud del recorrido?

Si la longitud en centímetros del recorrido es *x*, la rueda delantera habrá dado $\frac{x}{2\pi \cdot 18}$ vueltas y la trasera $\frac{x}{2\pi \cdot 25}$. Basta ahora resolver la ecuación $\frac{x}{2\pi \cdot 18} = \frac{x}{2\pi \cdot 25} + 1.500$ para hallar $x \simeq 605.878{,}6$ cm $= 6.058{,}786$ m.

Ejercicio B/4-6. Se inscribe un hexágono regular en un círculo de 8 m dre radio. ¿Qué área tiene cada uno de los seis segmentos circulares determinados?

Basta restar el área del triángulo equilátero de lado 8 a la del sector de 60°, por lo que es $A = (\pi \cdot 8^2/6) - (8^2\sqrt{3}/4) \simeq 5{,}\,7975$ m^2.

Ejercicio B/4-7. Hallar la longitud y el radio de un arco circular de 120° sabiendo que la primera de tales magnitudes excede de 4 m a la segunda.

Si el radio es *r*, un arco de 120° mide $\frac{2\pi r \cdot 120}{360} = \frac{2\pi r}{3}$. Será $\frac{2\pi r}{3} = r + 4$, de donde se despeja *r* para obtener $r \simeq 3{,}655$ m. El arco tendrá longitud $(2\pi \cdot 3{,}655)/3 \simeq 7{,}655$ m.

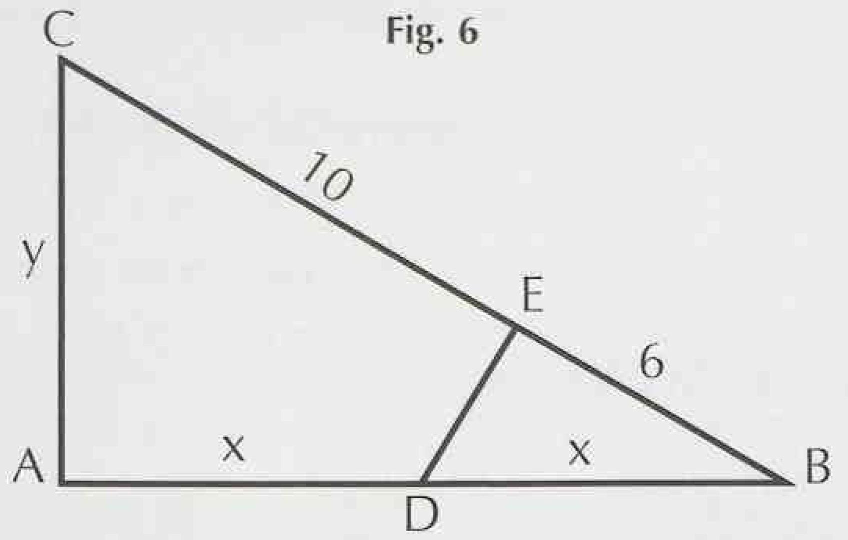


Fig. 6

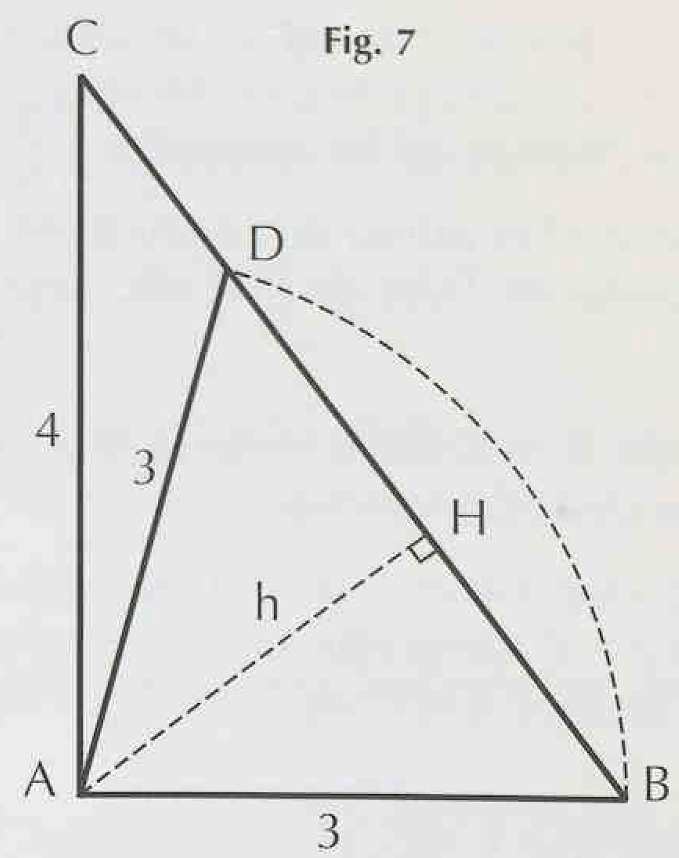


Fig. 7

Ejercicio B/4-8. Un meridiano terrestre mide aproximadamente 40.000 km. ¿Cuál es el radio de la Tierra?

Será $2\pi r = 40.000$, o sea $r = 40.000/2\pi$. Tomando $\pi = 3{,}14$ sale $r = 6.369$ km y con $\pi = 3{,}1416$ se obtiene $r = 6.366$ km. La diferencia de 3 km no es significativa pues la Tierra es irregular y sólo estamos estimando valores medios.

Ejercicio B/6-1. Demostrar que todo punto de la mediatriz de un segmento (perpendicular en el punto medio), equidista de los extremos del segmento y, recíprocamente, que si un punto equidista de los extremos de un segmento es de la mediatriz de dicho segmento.

Se demostrará primero que si P es de la mediatriz del segmento AB, P equidista de A y de B. En efecto, sea Q el punto intersección de la mediatriz con el segmento, entonces los triángulos rectángulos PQA y PQB son iguales por tener ambos catetos iguales. En consecuencia, las hipotenusas también son iguales, es decir $\overline{PA} = \overline{PB}$.
Recíprocamente, sea P un punto del plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Consideremos la perpendicular P al segmento AB, que cortará a éste en un punto interior Q (si Q fuera exterior a AB, sería $\overline{PA} \neq \overline{PB}$). Los triángulos PQA y PQB, ambos rectángulos, son iguales por tener la hipotenusa y un cateto iguales. En consecuencia, los otros dos catetos también son iguales, es decir $\overline{QA} = \overline{QB}$, o lo que es lo mismo, Q es el punto medio del segmento AB y la recta PQ la mediatriz del mismo.

Ejercicio B/6-2. En un triángulo rectángulo, la perpendicular a la hipotenusa trazada desde el punto medio de uno de los catetos, divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitudes 10 cm y 6 cm. Calcúlense los catetos (fig. 6).

Los triángulos CAB y DEB son semejantes, por tener los ángulos iguales, y se cumple: $\dfrac{16}{2x} = \dfrac{x}{6}$, de donde $x = 4\sqrt{3}$. Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo CAB, se obtiene $y = \sqrt{16^2 - (2x)^2}$, de donde $y = 8$ cm.

Ejercicio B/6-3. Los catetos de un triángulo rectángulo son $AC = 4$ cm y $AB = 3$ cm.
Con centro en A y radio 3, se traza un arco hasta intersectar con la hipotenusa en un punto D (fig. 7). Calcúlese la longitud BD.

El triángulo ADB es isósceles y su altura AH coincide con la altura h relativa a la hipotenusa del triángulo CAB, cuya superficie puede ser calculada, bien tomando la hipotenusa como base, bien tomando un cateto como base, con lo que se tiene: $S = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = \dfrac{5 \cdot h}{2}$, de donde $h = \dfrac{12}{5}$ cm.
Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo AHB, se tiene $\overline{HB} = \dfrac{9}{5}$ cm, y por lo tanto, $\overline{BD} = \dfrac{18}{5}$ cm.

Ejercicio B/6-4. El ángulo agudo C de un triángulo rectángulo mide 50°. Hállense los ángulos que forma la mediana relativa a la hipotenusa con las bisectrices de los ángulos agudos (fig. 8).
INDICACIÓN: Compruébese, previamente, que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa coincide con la mitad de la longitud de ésta. Si a es la hipotenusa, y b y c los catetos, se tiene $m_a = (1/2) \cdot \sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2} = a/2$.

Por lo tanto, el triángulo AMC es isósceles y se cumple: $< MAC = < MCA = 50°$ y $< DCA = 25°$. En consecuencia, $< ADC = 180° - (50° + 25°) = 105°$.
Para calcular $< AOB$, se tiene que $< ABC = 90° - 50° = 40°$, luego $< ABO = 20°$; además, $< BAO = < BAM = 90° - < MAC = 90° - 50° = 40°$. Se tendrá, pues, que en el triángulo AOB, $< AOB = 180° - (20° + 40°) = 120°$.

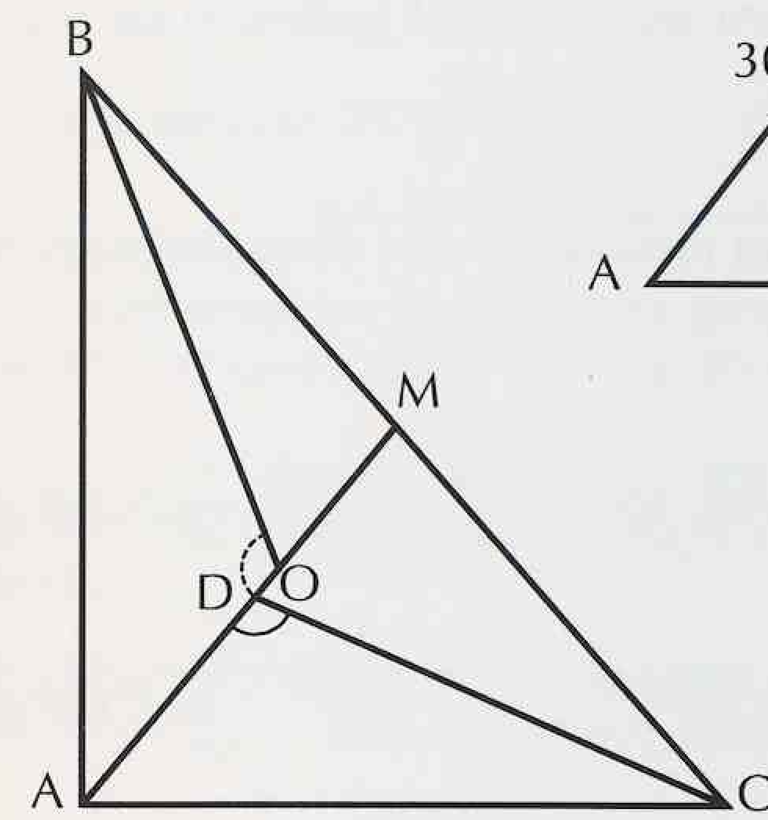


Fig. 8

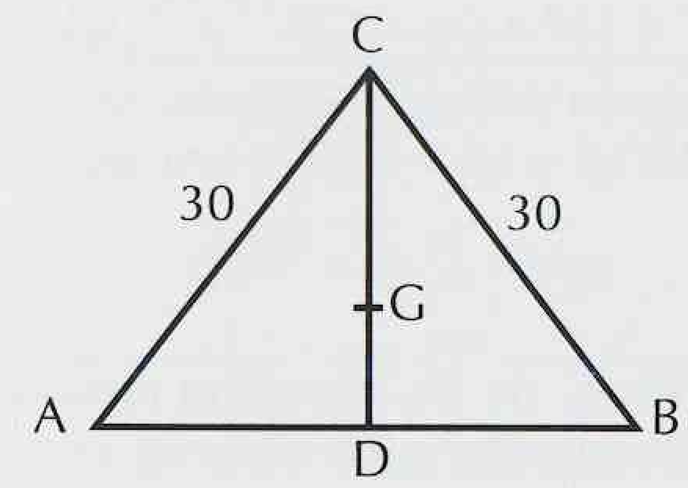


Fig. 9

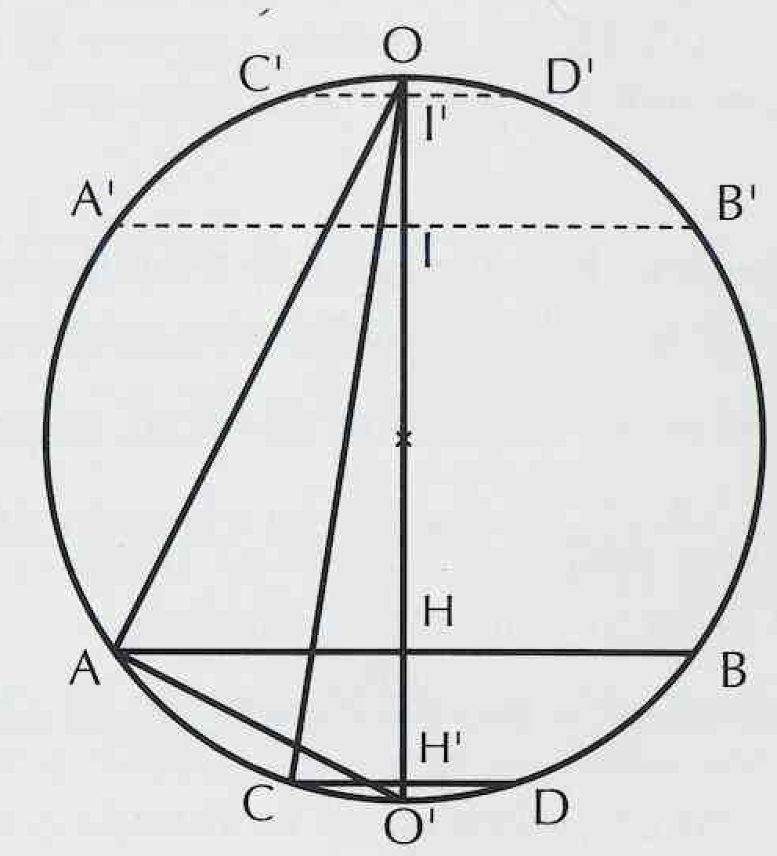


Fig. 10

Ejercicio B/6-5. Calcúlense las tres alturas de un triángulo ABC, de lados $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $c = 50$ cm.

Basta con aplicar las fórmulas dadas en la ficha de teoría.
$h_a = (2/a) \cdot \sqrt{P\,(P-a)\,(P-b)\,(P-c)} = (2/40) \cdot \sqrt{60\,(60-40) \cdot (60-30) \cdot (60-50)} = 30$ cm,
$h_b = (2/b) \cdot \sqrt{P\,(P-a)\,(P-b)\,(P-c)} = (2/30) \cdot \sqrt{60\,(60-40) \cdot (60-30) \cdot (60-50)} = 40$ cm,
$h_c = (2/c) \cdot \sqrt{P\,(P-a)\,(P-b)\,(P-c)} = (2/50) \cdot \sqrt{60\,(60-40) \cdot (60-30) \cdot (60-50)} = 24$ cm,

Ejercicio B/6-6. La base de un triángulo isósceles mide 36 cm y los lados iguales 30 cm cada uno. Encontrar las distancias entre el baricentro y los vértices del triángulo (fig. 9).

Se pide la longitud de los segmentos GC y $GA = GB$. Para ello, calculamos la longitud de la mediana CD, que en este caso coincide con la altura.
$\overline{CD} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ cm. Luego, $\overline{GC} = \dfrac{2}{3}\,\overline{CD} = 16$ cm (propiedad del baricentro). Aplicando ahora el teorema de Pitágoras al triángulo ADG, se tiene $\overline{GA} = \sqrt{18^2 + 8^2} = 2\sqrt{97}$ cm.

Ejercicio B/6-7. Sean dos cuerdas paralelas de 80 cm y 28 cm, respectivamente, en un círculo de radio 50 cm. Hállese la distancia entre dichas cuerdas (fig. 10).

Las posiciones relativas de las cuerdas pueden ser dos, según estén a un mismo lado o a distinto lado del centro. Calculamos $HO' = x$, y $HO = 100 - x$; aplicando el teorema de la altura en el triángulo $O'AO$: $40^2 = x \cdot (100 - x)$, de donde $x = 80$ o $x = 20$ cm. Procediendo de la misma forma en el triángulo OCO', calculamos $H'O' = y$; $H'O = 100 - y$, por lo tanto $14^2 = y \cdot (100 - y)$, de donde $y = 98$ cm o $y = 2$ cm.
Las distancias entre las cuerdas serán
$\overline{HI'} = \overline{IH'} = 98 - 20 = 78$ cm y $\overline{HH'} = \overline{II'} = 20 - 2 = 18$ cm.

Ejercicio B/6-8. La bisectriz y la altura que corresponden a un mismo vértice de un triángulo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los lados de dicho ángulo 34 cm. Hállese el perímetro del triángulo (fig. 11).

Se tiene que la altura $\overline{CH} = 16$ cm, la bisectriz $\overline{CI} = 20$ cm y el lado a = 34 cm. $\overline{HI} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ cm; $\overline{HB} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ cm. Por lo tanto, $\overline{IB} = \overline{HB} - \overline{HI} = 18$ cm. Ahora, tomando $\overline{AI} = m$ y aplicando el teorema de la bisectriz en el triángulo ABC, resulta:

$$\frac{m}{18} = \frac{b}{34} \qquad (1)$$

De otro lado, en el triángulo *AHC* se verifica:

$$b^2 = 16^2 + (m - 12)^2 \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen un sistema de segundo grado cuya solución es: $m = 225/26$ cm; $b = 425/26$ cm. Además, $c = m + \overline{IB} = 225/26 + 18 = 693/26$ cm, por lo que el perímetro del triángulo será $a + b + c = 2.002/26$ cm.

Ejercicio B/7-1. Hallar la fórmula del área, *S*, de un segmento circular en una circunferencia de radio *r*, y relativo a un sector circular de amplitud $n°$ (fig. 12).

Si el sector circular es convexo, se tendrá:

$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} - \text{área del triángulo } ABC = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} - \frac{1}{2}\,\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen } n° = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} - \frac{1}{2}\, r^2 \text{ sen } n°$$

Si el sector circular es cóncavo:

$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} + \text{área del triángulo } AB'C' = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} + \frac{1}{2}\, r^2 \text{ sen } (360° - n°) = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} - \frac{1}{2}\, r^2 \text{ sen } n°$$

Luego en ambos casos la fórmula coincide.

Ejercicio B/7-2. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

Para calcular las de 30° y 60° se utiliza un triángulo equilátero de lado *a* (fig. 13). Trazando una de las alturas, se forma el triángulo rectángulo *ADC*. Por el teorema de Pitágoras, se tiene:
$\overline{CD} = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{(3a^2)/4} = (a\sqrt{3})/2$. Y en el mismo triángulo:

$$\text{sen } 60° = \frac{(a\sqrt{3})/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ \cos 60° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2};\ \text{tg } 60° = \frac{(a\sqrt{3})/2}{a/2} = \sqrt{3}. \text{ Análogamente,}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{(a\sqrt{3})/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ \text{tg } 30° = \frac{a/2}{(a\sqrt{3})/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Las razones trigonométricas de 45° se calculan en un triángulo rectángulo isósceles de lado *a* (fig. 14).

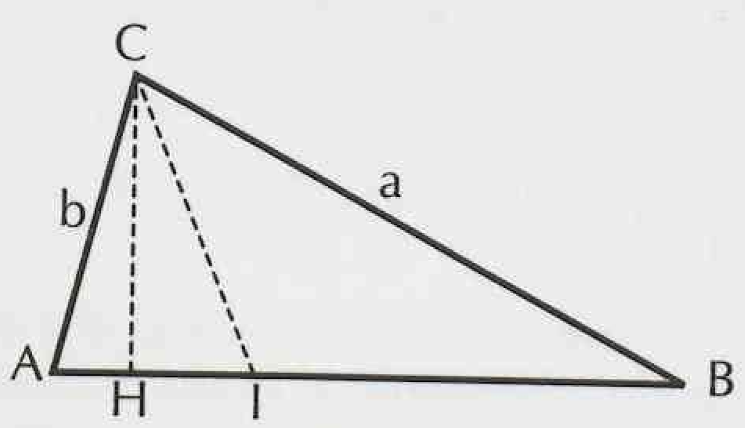


Fig. 11

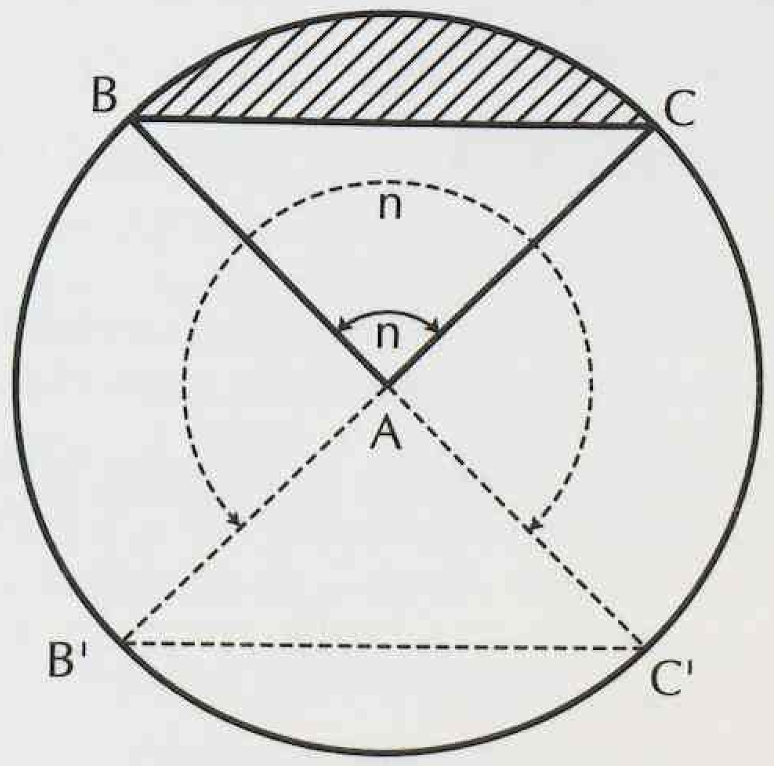


Fig. 12

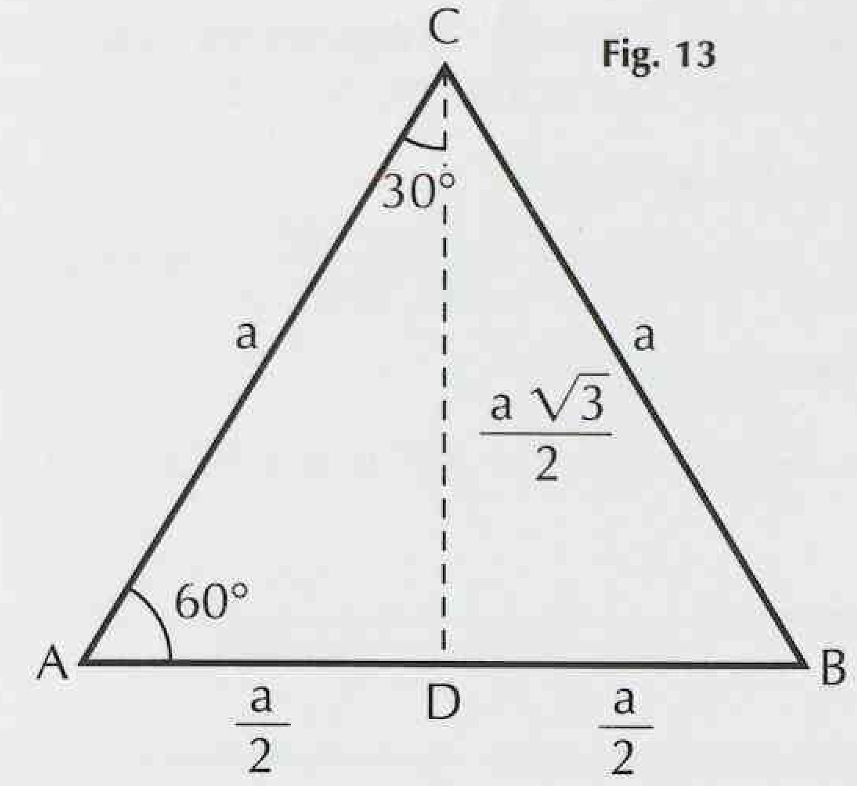


Fig. 13

La hipotenusa es $BC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, luego

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ \text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Si se tiene presente la definición general de las razones trigonométricas de un ángulo, no hay dificultad en ver que sen 0° = 0; cos 0° = 1; tg 0° = 0; y sen 90° = 1; cos 90° = 0; tg 90° = ∞.

Ejercicio B/7-3. Sabiendo que sen$x$ = 0,75 y que $\pi/2 < x < \pi$. Calcular las restantes razones trigonométricas.

Por la igualdad fundamental se tiene $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} \simeq -0{,}66$, ya que *x* corresponde al segundo cuadrante; tg$x \simeq 1{,}13$. La cosec$x$, sec$x$ y tg$x$ se calculan de manera directa, a partir de su definición.

Ejercicio B/7-4. Hállese la altura a la que vuela el avión de la figura 15.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En el triángulo } ADC \text{ se verifica } \dfrac{h}{x} = \text{tg } 60° = \sqrt{3} \\ \text{En el triángulo } CDB \text{ se verifica } \dfrac{h}{3.000 - x} = \text{tg } 40° \end{array}\right\} \text{Resolviendo el sistema, } h \simeq 1.695{,}7 \text{ m.}$$

Ejercicio B/7-5. Hállese la superficie de los siguientes triángulos: 1) $a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $C = 80°$; 2) $a = 20$ cm, $b = 40$ cm, $c = 50$ cm; 3) $a = 30$ cm, $B = 30°$, $C = 45°$.

1) $S = (1/2) \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}C = (1/2) \cdot 40 \cdot 20 \cdot \text{sen } 80° \simeq 787{,}84$ cm².

2) $S = \sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$, en donde $p = (1/2)\,(a + b + c)$, resultando $S \simeq 379{,}96$ cm².

3) $S = \dfrac{a^2 \cdot \text{sen}B \cdot \text{sen}C}{2 \cdot \text{sen } (B + C)} = \dfrac{30^2 \cdot \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 45°}{2 \cdot \text{sen } 75°}$. Esta expresión puede computarse sin necesidad de calculadora, teniendo presente que sen 75° = sen (30° + 45°).

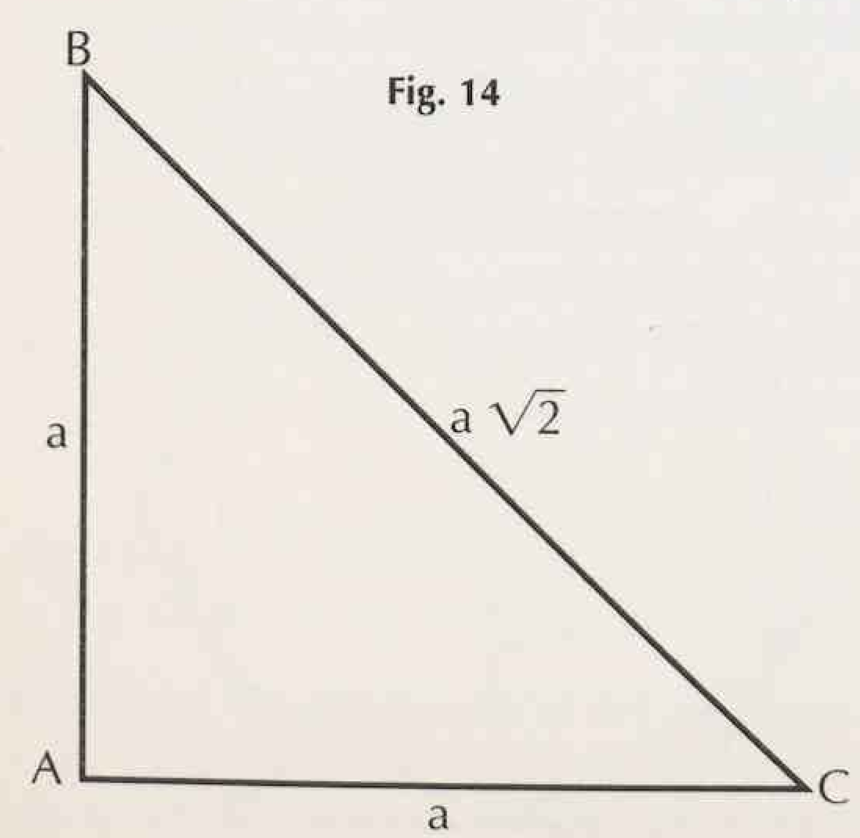


Fig. 14

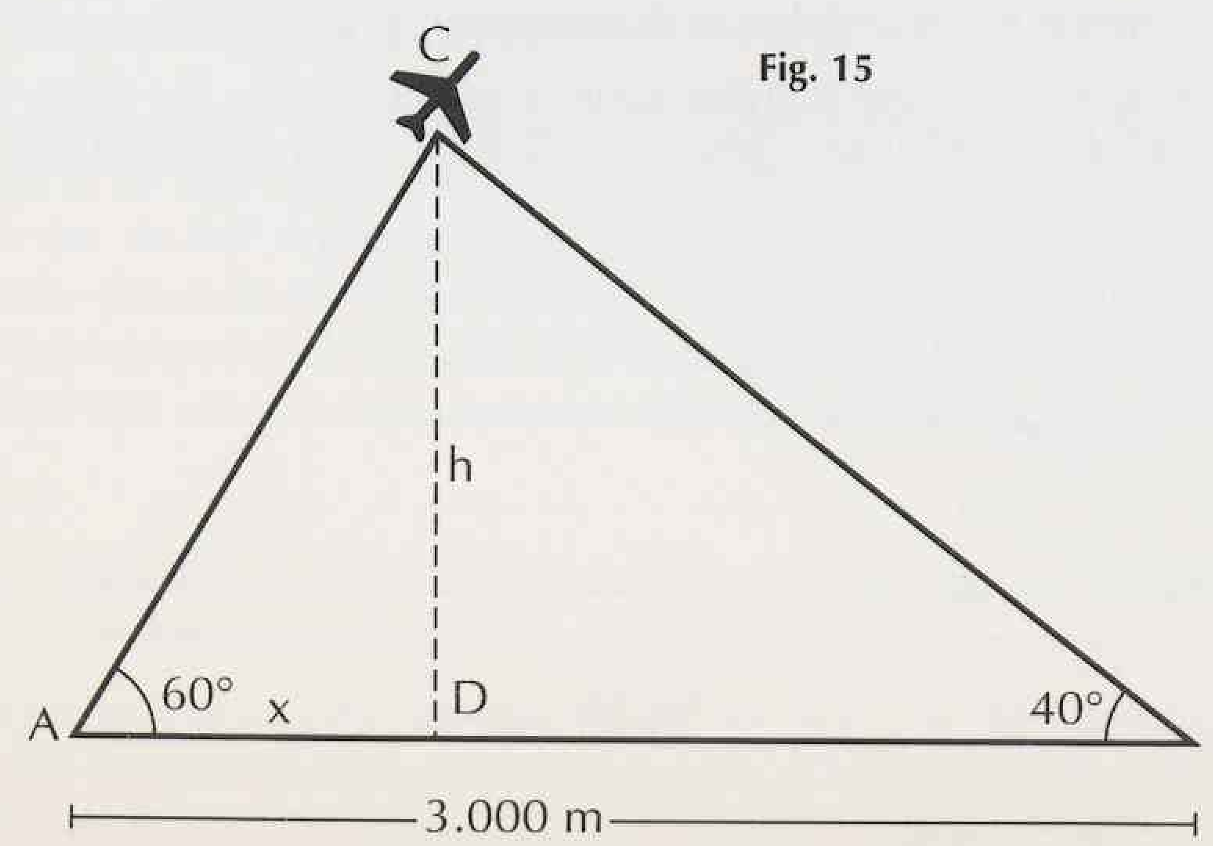


Fig. 15

Ejercicio B/7-6. Resuélvase el triángulo ABC en los siguientes casos: 1) $a = 8$ cm, $B = 30°$, $C = 45°$; 2) $C = 30°$, $b = 10\sqrt{2}$ cm, $c = 10$ cm; 3) $a = 20$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

1) Aplicando el teorema de los senos, se tiene:

$\frac{8}{\text{sen } 105°} = \frac{b}{\text{sen } 30°} = \frac{c}{\text{sen } 45°}$, y resulta $b = \frac{8 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 105°} \simeq 4{,}14$ cm; $c = \frac{8 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 105°} \simeq 5{,}85$ cm.

2) Aplicando el teorema de los senos, se tiene:

$\frac{10}{\text{sen } 30°} = \frac{10\sqrt{2}}{\text{sen} B}$, y es $\text{sen} B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego $B = 45°$ o $B = 135°$. Existen, pues, dos soluciones. Por lo tanto, $A = 105°$ o $A = 15°$.

Volviendo a aplicar el mismo teorema: $\frac{a}{\text{sen } 105°} = \frac{10}{\text{sen } 30°}$, de donde $a \simeq 19{,}3$ cm, y lo mismo para el otro caso.

3) En este caso se aplica el teorema del coseno:

$$20^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos A. \text{ De aquí } \cos A = 0 \text{ y } A = 90°.$$

Pueden hallarse los ángulos B y C de la misma forma o, visto que el triángulo es rectángulo, hallarlos a partir de la definición seno. Resulta $B \simeq 53{,}13°$, $C \simeq 36{,}86°$.

Ejercicio B/8-1. ¿Cuántos lados tiene un polígono de 65 diagonales?

Habrá de ser $65 = n(n-3)/2$, o sea $n^2 - 3n - 130 = 0$, cuya solución positiva es $n = 13$.

Ejercicio B/8-2. Hallar el área de un cuadrado cuya diagonal excede en 5 cm al lado.

Sea a el lado y d la diagonal. Será $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, o sea $d = a\sqrt{2}$. Luego $a\sqrt{2} = a + 5$, de donde $a = 5/(\sqrt{2} - 1)$ y el área es $a^2 \simeq 145{,}71$ cm^2.

Ejercicio B/8-3. La diagonal de un rectángulo mide 39 cm y los dos lados contiguos suman 51 cm. Calcular el área.

Sean a y b los lados. Tenemos $a + b = 51$ y $a^2 + b^2 = 39^2$. Despejando $b = 51 - a$ en la primera y sustituyendo en la segunda, se llega a $a^2 - 51a + 40 = 0$, cuyas soluciones son $a = 36$ (sería $b = 15$) o $a = 15$ (será $b = 36$). El área es $36 \cdot 15 = 540$ cm^2.

Ejercicio B/8-4. Un rombo, cuya área es de 42 m^2, tiene como suma de sus diagonales 20 m. Hallar su perímetro.

Sean a el lado, D y d las diagonales. Se tiene $42 = D \cdot d/2$ y además $D + d = 20$. Despejando $D = 20 - d$ en la segunda, y sustituyendo en la primera se obtiene la ecuación $d^2 + 20d + 84 = 0$, cuyas soluciones son 6 y 14, que llevan, respectivamente, a $D = 14$, $d = 6$. Como $a^2 = (d/2)^2 + (D/2)^2 = 58$, el perímetro es $4a = 4\sqrt{58} \simeq 30{,}463$ m.

Ejercicio B/8-5. El área de un trapecio es de 1.200 m^2, los dos ángulos de la base miden 45° y la base menor 65 m. Hallar la base mayor y la altura.

Al ser de 45° los dos ángulos básicos se tendrá $B = b + 2h = 65 + 2h$ (fig. 16) y el área es $1.200 = (1/2) \cdot (B + b) \cdot h = (1/2)(130 + 2h) \cdot h = 65 + h^2$, ecuación cuya solución positiva es $h = 15$, por lo que $B = 95$.

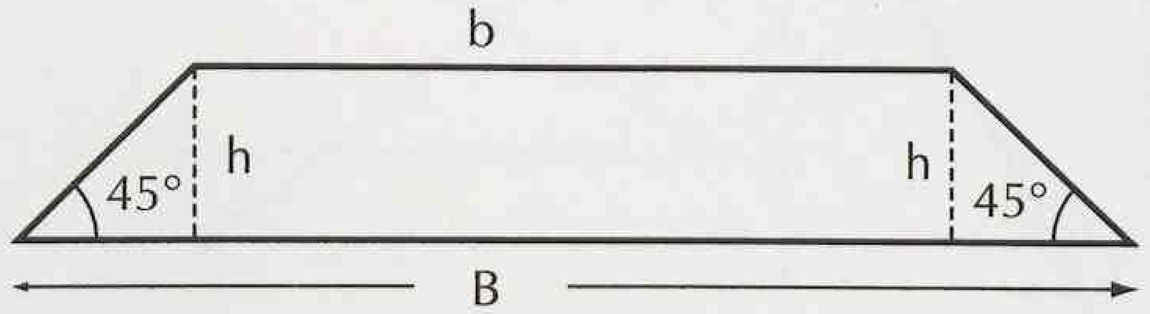


Fig. 16

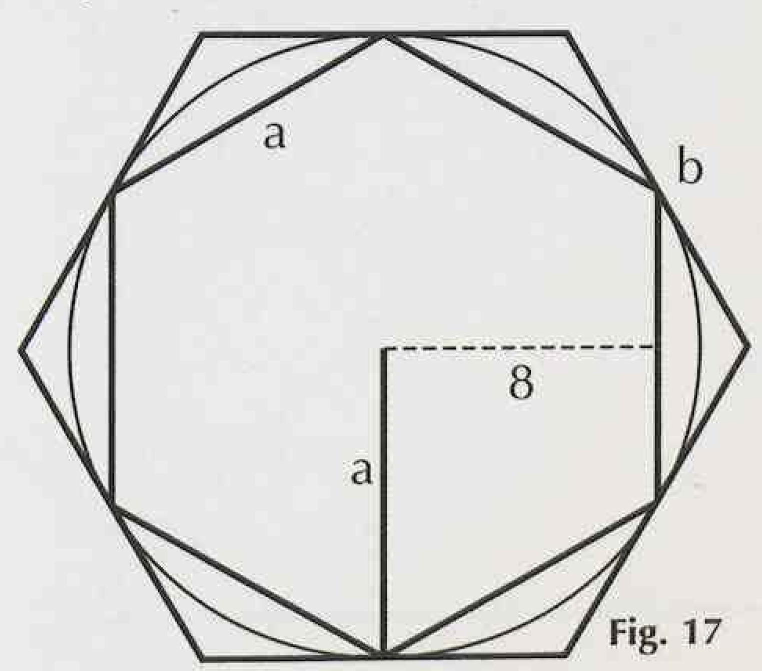
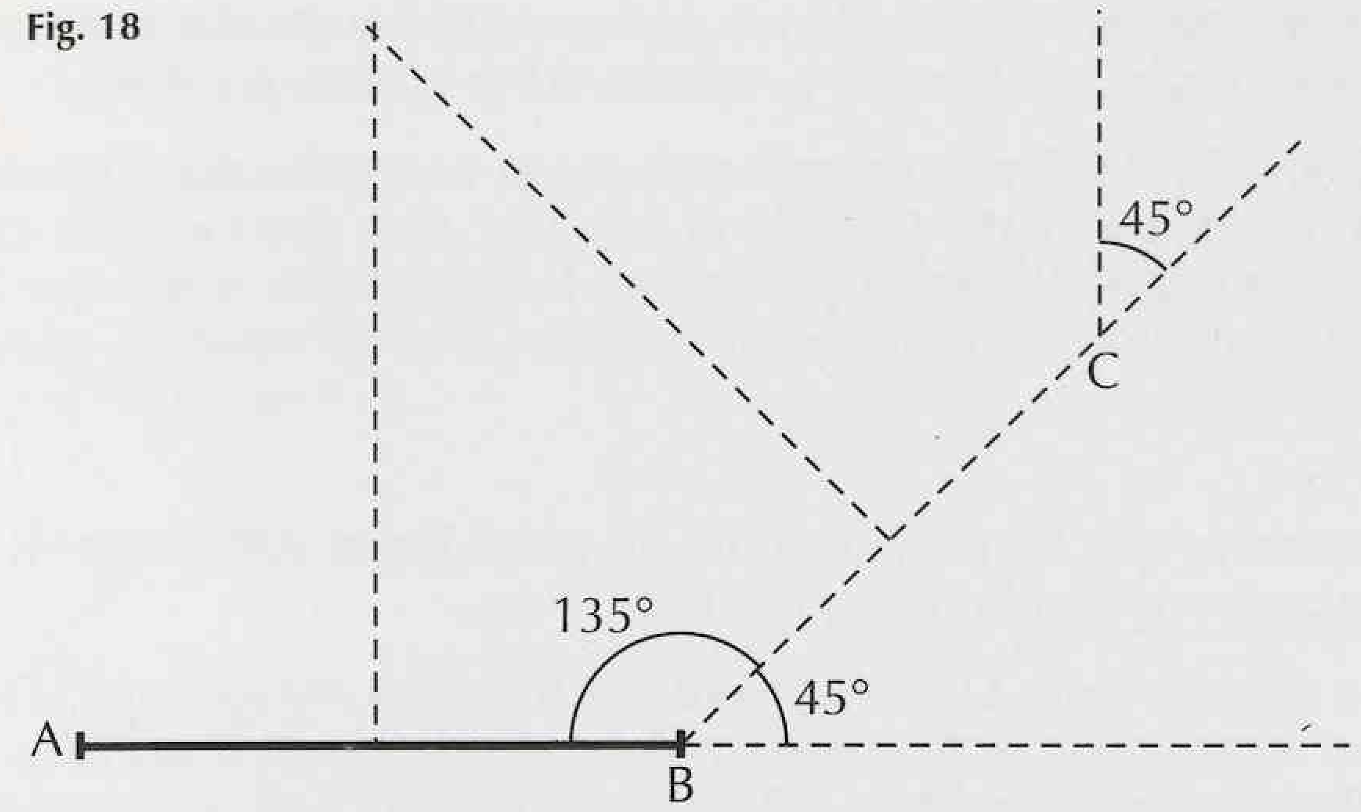


Fig. 17

Fig. 18



Ejercicio B/8-6. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular en el cual cuatro de sus ángulos suman siete rectos?

Será $4 \cdot (180(n-2)/n) = 7 \cdot 90$, ecuación de primer grado cuya solución es $n = 16$.

Ejercicio B/8-7. La apotema del hexágono regular inscrito en una circunferencia mide 8 cm. Hallar el lado y el área del hexágono regular circunscrito a la misma.

Si el lado de un hexágono es x, la apotema, que es el radio de la circunferencia inscrita, es $x = \sqrt{3}/2$ y el radio de la circunscrita es x. Sean a y b, respectivamente, los lados del hexágono no inscrito y circunscrito a la circunferencia del enunciado. Será (fig. 17) $8 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ y $a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. La primera da $a = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ y sustituyendo en la segunda tenemos $b = 32/3 \simeq 10{,}67$ cm. El área pedida es $s = b^2 \cdot 6/(4 \cdot \text{tg } 30°) \simeq 295{,}6$ cm^2.

Ejercicio B/8-8. Probar que el lado del triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia es doble que el del triángulo inscrito.

Sean x e y, respectivamente, el lado del triángulo circunscrito y el del inscrito, y r el radio de la circunferencia. Será $r = \frac{x}{2 \text{ tg } 60°}$, $r = \frac{y}{2 \text{ sen } 60°}$, por lo que $x = 2r \text{ tg } 60° = \frac{2r \text{ sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{y}{\cos 60°} = 2y$.

Lo hemos hecho con fórmulas: el lector lo hará aún más fácilmente razonando geométricamente sobre un dibujo.

Ejercicio B/8-9. ¿Cómo se construirá un octógono regular cuyo lado sea un segmento AB dado?

Observemos en primer lugar que el ángulo formado por dos lados de un octógono regular es $180°(8-2)/8 = 135°$, suplemento de 45°. Ello sugiere la siguiente construcción (fig. 18): con vértice en B se forma el ángulo de 135° como suplemento del de 45° construido en la prolongación de AB; sobre la recta obtenida se marca el punto C a la misma distancia de B que éste de A. Se puede reiterar el proceso a partir de BC, o bien hallar la circunferencia circunscrita, cuyo centro es la intersección de las mediatrices de AB y BC y continuar marcando sobre ella arcos congruentes con el que corresponde a AB.

Ejercicio B/9-1. Demuéstrese que si los ángulos de un cuadrilátero $ABCD$ cumplen $\hat{A} + \hat{C} = 180° = \hat{B} + \hat{D}$, entonces está inscrito en una circunferencia.

En efecto, la construcción del arco capaz que se vio en B/9 muestra que al ser $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ los arcos capaces de $\hat{A}$ y de $\hat{C}$ sobre el segmento BD en semiplanos opuestos tienen el mismo centro, siendo su unión la circunferencia circunscrita $ABCD$.

Ejercicio B/9-2. En una circunferencia se tienen puntos A, B, C y D tales que los ángulos centrales $\widehat{OAB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$ son iguales. Probar que la cuerdas BC y AD son paralelas.

Los triángulos OAB, OBC y OCD son congruentes, según el enunciado, e isósceles; en particular $\widehat{OAB} = \widehat{ODC}$. Como el triángulo OAD también es isósceles, será $OAD = ODA$. De todo lo anterior resulta $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$. Si tomamos ahora un punto X de la recta AB de modo que B esté entre A y X se tiene $\widehat{XBC} = \widehat{CDA}$, pues ambos son suplementarios de $\widehat{ABC}$. En resumen, pues, $\widehat{BAD} = \widehat{XBC}$, de donde el paralelismo esperado.

Ejercicio B/9-3. Demostrar que las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia lo dividen en cuatro triángulos dos a dos semejantes.

Sea O el centro de la circunferencia. Demostraremos que $\triangle\, OAB$ es semejante a $\triangle\, ODA$. Para ello basta ver la igualdad de dos ángulos, pero $\widehat{ABO} = \widehat{ABD}$ mide lo mismo que $\widehat{ACD} = \widehat{OCD}$ por estar inscritos en una circunferencia abarcando el mismo arco AD, y además $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice.

Ejercicio B/10-1. Sean g_1 y g_2 giros de amplitudes respectivas α_1 y α_2, con $\alpha_1 \neq -\alpha_2$ y centros distintos O_1 y O_2, respectivamente. Construir el centro de giro producto $g_2 \cdot g_1$.

Recordemos que el producto de dos simetrías respecto de ejes que se cortan en un punto es un giro de centro en tal punto y amplitud doble del ángulo entre los ejes. Sea, pues, $g_1 = s_2 \cdot s_1$, donde s_2 es la simetría respecto a la recta por $O_1\, O_2$ y s_1 la simetría respecto a la recta por O_1 que forma ángulo $\alpha_1/2$ con $O_1\, O_2$. Sea $g_2 = s_3 \cdot s_2$, donde s_2 ya se ha descrito y s_3 es la simetría respecto a la recta por O_2 y ángulo $\alpha_2/2$ con $O_1\, O_2$. Será $g_2 \cdot g_1 = (s_3 \cdot s_2) \cdot (s_2 \cdot s_1) = s_3 \cdot (s_2 \cdot s_2) \cdot s_1 = s_3 \cdot s_1$, donde vemos que el centro del giro producto es la intersección de los ejes de s_1 y s_3.

Ejercicio B/10-2. Se toman en el plano dos ejes de coordenadas cartesianas. Sea g el giro de 90° en torno al origen y s la simetría respecto al eje de ordenadas. ¿Qué desplazamientos son $s \cdot g$ y $g \cdot s$?

Ambos productos son desplazamientos inversos, pues $- \cdot + = + \cdot - = -$, y ambos tienen fijo el origen O, pues es también fijo por g y por s; luego se trata de simetrías axiales. El eje se hallará uniendo dos puntos fijos o formando la mediatriz de un punto no fijo y su imagen, por ejemplo el punto $(1, 0)$. Tenemos $s \cdot g\,(1, 0) = s\,(0, 1) = (0, 1)$, luego $s \cdot g$ es la simetría respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes (mediatriz de $(1, 0)$ y $(0, 1)$). Análogamente $g \cdot s\,(1, 0) = g\,(-1, 0) = (0, 1)$, con lo que $g \cdot s$ es la simetría axial respecto de la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.

Ejercicio B/10-3. Demuéstrese que toda homotecia transforma cualquier recta r que no pase por el centro O de homotecia en una recta paralela a r.

Sean A y B dos puntos de r y A' y B' sus imágenes (fig. 19). Los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, pues $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ y $(OA'/OA) = (OB'/OB)$, razón que es la de homotecia. Luego será $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$, de donde el paralelismo.

Ejercicio B/11-1. Si no son cuadrados, ¿cuántos ejes de simetría tienen un rombo y un rectángulo?

Dos el rombo, las diagonales, y dos el rectángulo, las paralelas medias. Todo ello está presente en un cuadrado, que tiene cuatro ejes.

Ejercicio B/11-2. Demuéstrese que un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo si sus diagonales se cortan en el punto medio de ambas.

Supongamos que $ABCD$ es un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en O (fig. 20). Los triángulos OAB y OCD son congruentes pues $AB = CD$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, $\widehat{BOA} = \widehat{DOC}$ por ser opuestos por el vértice y $\widehat{BAD} = \widehat{OCD}$ por ser alternos internos con las paralelas BC y AD. Luego, $OB = OD$ y $OA = OC$. Recíprocamente, supongamos que en un cuadrilátero $OB = OD$ y $OC = OA$ (fig. 21). Como $\widehat{BOC} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, resultan congruentes $\triangle OAB$ y $\triangle\ OCD$; en particular $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$, por lo que BC es paralela a AD. Análogamente se haría con $\triangle\ OBC$ y $\triangle\ ODA$.

Ejercicio B/11-3. Las áreas de dos polígonos semejantes son 144 m² y 441 m²; sabiendo que el perímetro del primero es 46 m, calcular el del segundo.

Si el perímetro y el área respectivos son p_1, A_1 y p_2, A_2, sabemos que

$$\frac{A_1}{A_2} = \left[\frac{P_1}{P_2}\right]^2, \text{ es decir } \frac{144}{441} = \left[\frac{46}{P_2}\right]^2$$

luego $P_2 = 46 \cdot \sqrt{441/144} \simeq 80{,}5$ m.

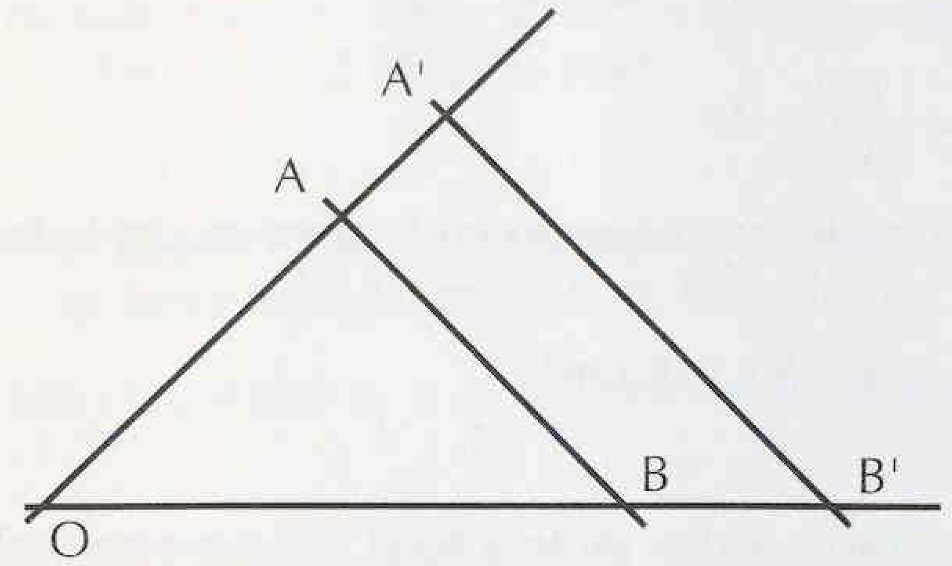


Fig. 19

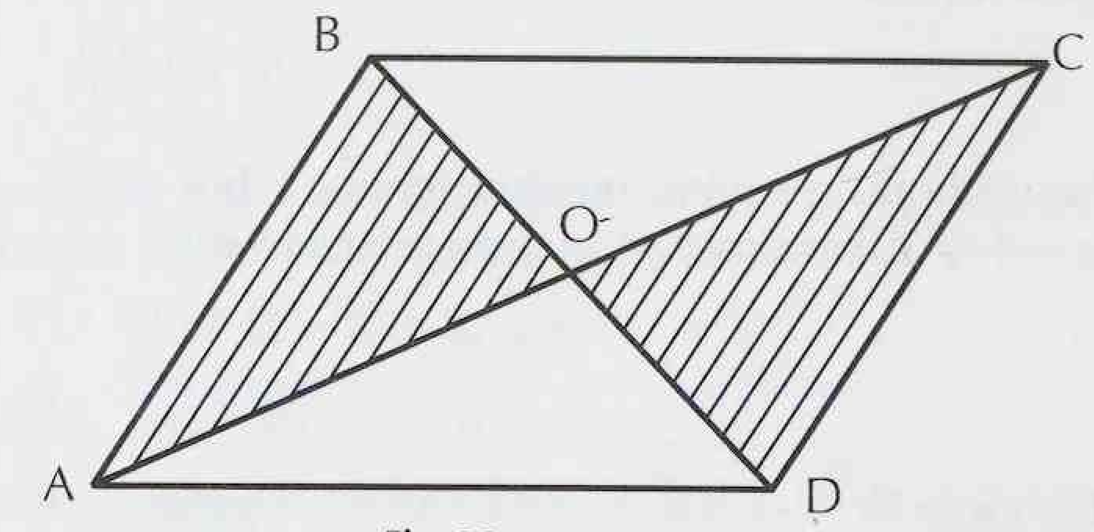


Fig. 20

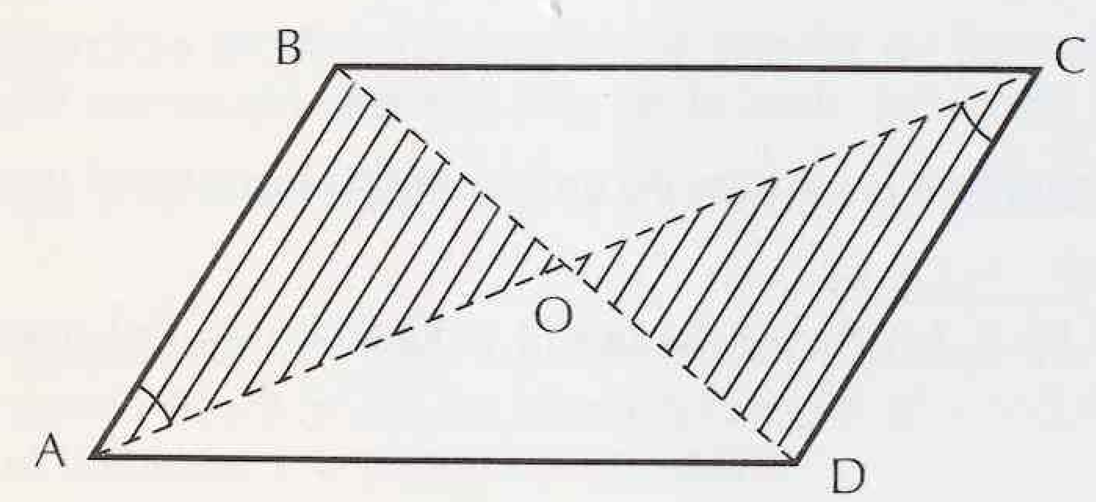


Fig. 21

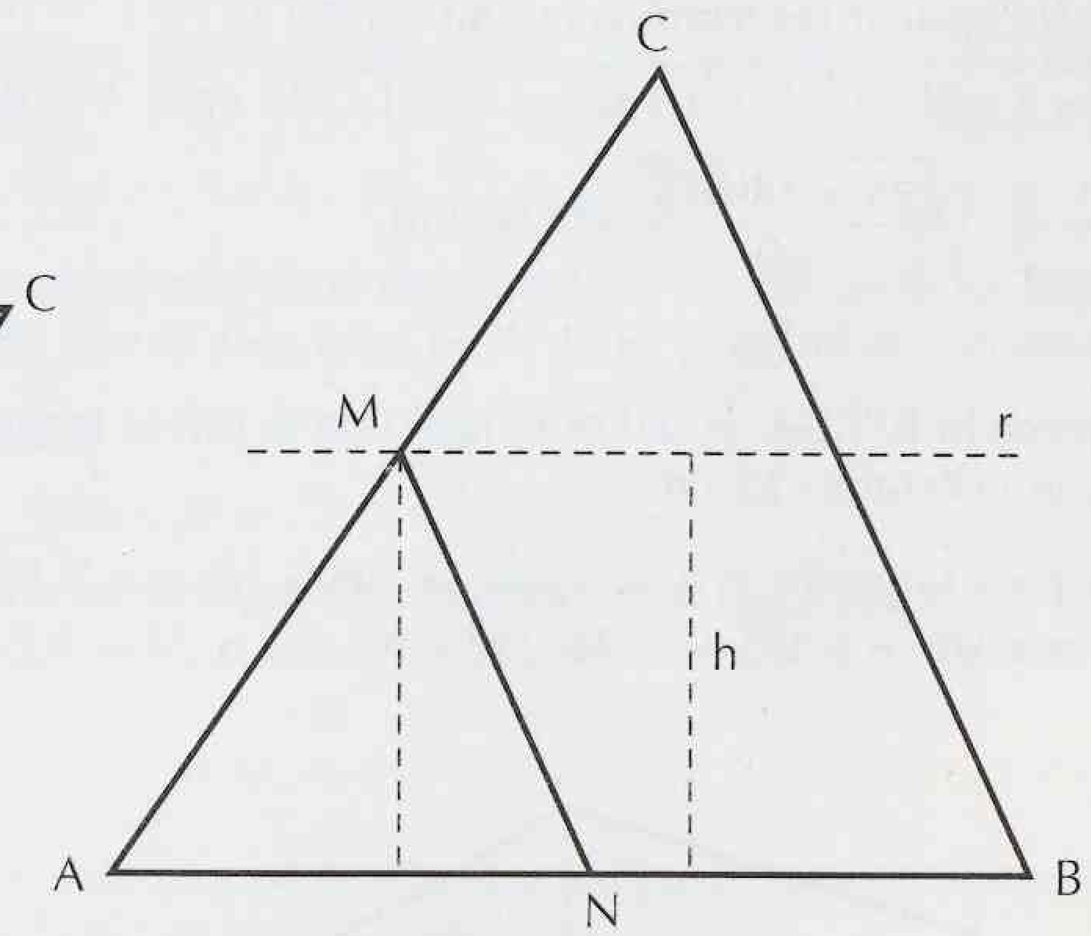


Fig. 22

Ejercicio B/11-4. ¿A qué distancia aparecen en un mapa 1:250.000 dos casas que en la realidad distan 7 km?

$$(7 \text{ km}) \cdot \frac{1}{250.000} = 0{,}000026 \text{ km} = 2{,}8 \text{ cm}.$$

Ejercicio B/11-5. ¿Cuál es la medida real de un terreno rectangular que en un mapa 1:25.000 tiene 6 cm² de área?

Será:

$(6 \text{ cm}^2) \cdot (25.000)^2 = 6 \cdot 625.000.000 \text{ cm}^2 = 3.750.000.000 \text{ cm}^2 = 375.000 \text{ m}^2 = 37{,}5$ hectáreas.

Ejercicio B/11-6. Construir un triángulo, dados dos ángulos y la altura h sobre el lado comprendido.

Construyamos los ángulos dados sobre un segmento AB arbitrario (fig. 22), obteniéndose un triángulo ABC semejante al que deseamos. Tracemos ahora la recta r, paralela a AB, a distancia h de AB. Si $M = r \cap AC$, la paralela por M a BC corta a AB en un punto N de manera que el triángulo AMN cumple los requisitos deseados.

Ejercicio B/12-1. El área total de un cubo es de 486 cm². ¿Cuál es el volumen del octaedro cuyos vértices son los centros de las caras de dicho cubo?

Sea a la arista del cubo y b la del octaedro. Será (fig. 23) $b^2 = (a/2)^2 + (a/2)^2$ o sea $b = a\sqrt{2}/2$. Así pues, el volumen del octaedro es $V = b^3\sqrt{2}/3 = (a\sqrt{2}/2)^3 \cdot \sqrt{2}/3 = 2a^3/3 = 2.486/3 = 324$ cm³.

Ejercicio B/12-2. Hallar el área total de un tetraedro regular sabiendo que su altura mide 4 cm.

Sea a la arista y b la apotema del tetraedro (fig. 24). Como el pie de la altura es el centro del triángulo equilátero básico, se tiene

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b^2 = \left(\frac{b}{3}\right)^2 + h^2$$

Esta última, resuelta, nos proporciona $b = 3\sqrt{2}$, con lo que, sustituyendo en la primera, se halla $a = 4\sqrt{3}$. Finalmente, el área buscada es

$$S = a^2\sqrt{3} = (4\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \simeq 83{,}138 \text{ cm}^2.$$

Ejercicio B/12-3. En un dodecaedro regular de 8 cm de arista, hallar el área total, el volumen y el radio de la esfera inscrita.

Basta aplicar las fórmulas vistas en B/12:

$S = 3 \cdot 8^2 \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \simeq 1.321{,}327$ cm², $V = 8^3 \cdot (15 + 7\sqrt{5})/4 \simeq 3.923{,}417$ cm³,

$$r = \frac{8}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} \simeq 8{,}908 \text{ m}.$$

Ejercicio B/12-4. ¿Cuál es el radio de la esfera tangente a las aristas de un icosaedro inscrito en una esfera de radio 12 cm?

Si ρ es tal radio y a la arista, se tiene $12 = a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, por lo que $a \simeq 12{,}618$ cm. Así pues $\rho = a\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}/4 = 10{,}208$ cm.

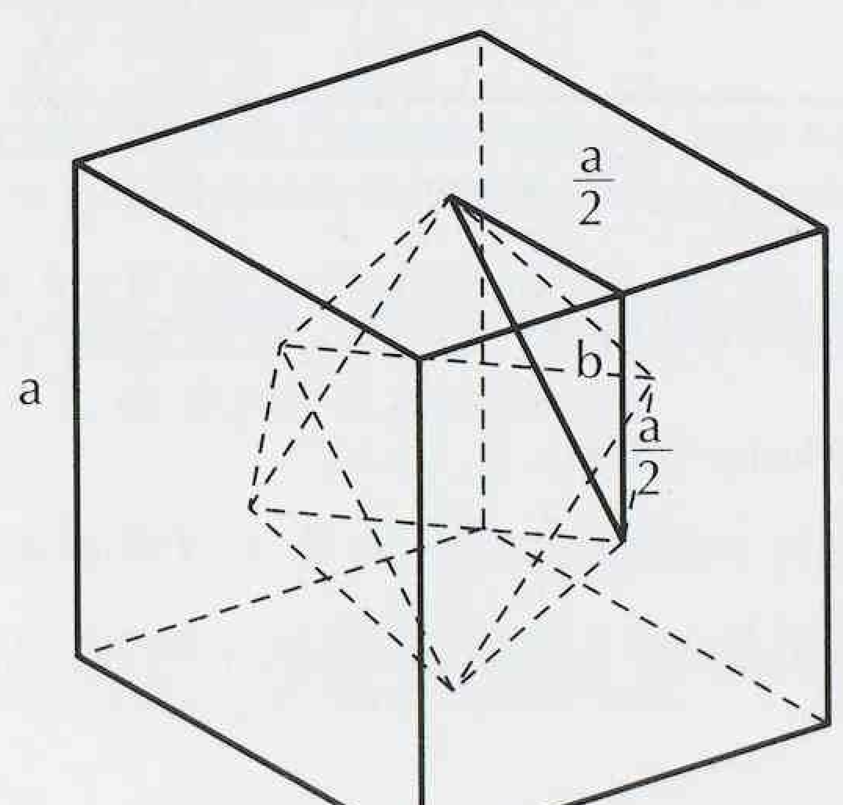


Fig. 23

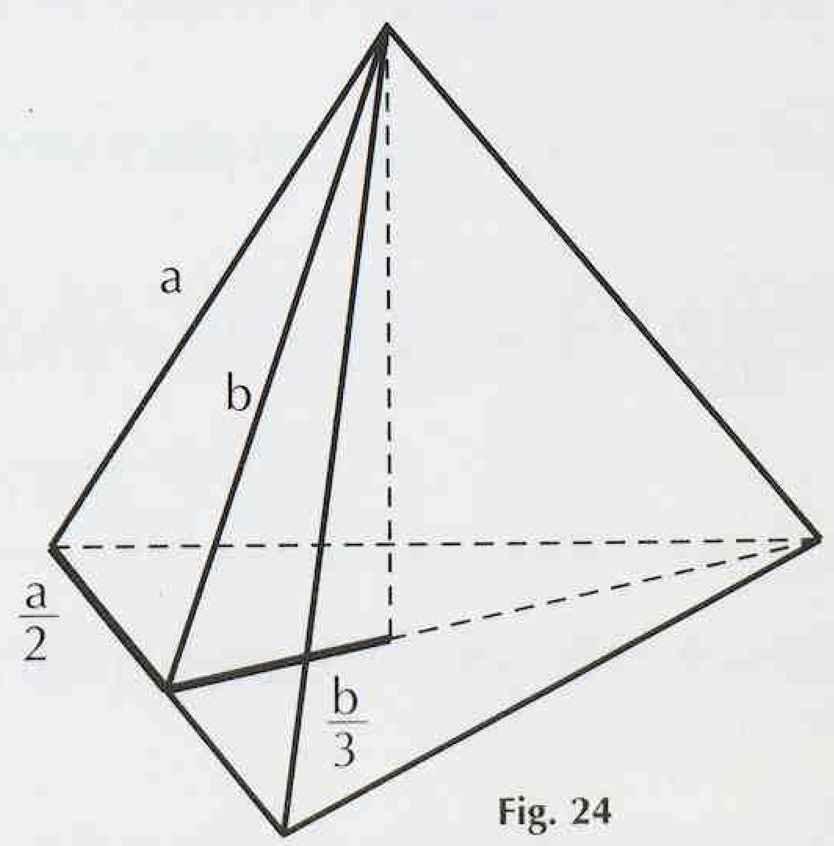


Fig. 24

Ejercicio B/13-1. La base de un prisma de 8 m de altura es un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 6 m. Calcular su volumen.

El cateto x del triángulo básico cumple $x^2 + x^2 = 6^2$, o sea $x = \sqrt{18}$ m, por lo que el área de la base es $(\sqrt{18} \cdot \sqrt{18})/2 = 9$ m². El volumen será $9 \cdot 8 = 72$ m³.

Ejercicio B/13-2. Hallar el volumen de un prisma hexagonal regular, sabiendo que su área lateral es 720 cm², la suma de su arista básica b y su arista lateral a es 23 cm, y que la arista lateral es mayor que la básica.

Los datos proporcionados son

$$6ba = 720, \quad a + b = 23, \quad a > b;$$

despejando en la segunda ecuación $b = 23 - a$ y sustituyendo en la primera, tras simplificar por 6, obtenemos $23a - a^2 = 120$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $a = 15$ o $a = 8$, pero como $b = 23 - a$ ha de ser menor que a, será $a = 15$, $b = 8$. Finalmente, como el área del hexágono de lado 8 es $8^2 \cdot 6/(4 \cdot \operatorname{tg} 30°) = 96\sqrt{3}$, según se vió en B/8; el volumen del prisma es $96\sqrt{3} \cdot 15 = 1.440\sqrt{3} \simeq 2.494{,}153$ cm³.

Ejercicio B/13-3. En un ortoedro cuya área total es 292 dm², una cara tiene 56 dm² y la arista que le es perpendicular mide 6 m. Calcular las longitudes de las otras aristas.

Sean las aristas x, y, z. Traducimos los datos en

$$2xy + 2xz + 2yz = 292, \quad xy = 56, \quad z = 6.$$

Usando las dos últimas para sustituir en la primera, tenemos $2 \cdot 56 + 2x \cdot 6 + 2 \cdot \frac{56}{x} \cdot 6 = 292$, luego $112 + 12x + \frac{672}{x} = 292$, o sea $12x + \frac{672}{x} = 180$, por los que $x + \frac{56}{x} = 15$, llegando a la ecuación $x^2 - 15x + 56 = 0$. Por lo tanto, o bien $x = 8$ (con lo que $y - 7$, $z = 6$), o bien $x = 7$ (con lo que $y = 8$, $z = 6$).

Ejercicio B/13-4. Una pirámide regular de base cuadrada tiene de superficie lateral un valor triple del correspondiente al área de la base. Sabiendo que el área total es 72 cm², ¿cuál es el volumen?

Sea b la arista básica y a la apotema. Los datos son

$$2ba = 3a^2, \quad 2ba + a^2 = 72.$$

Despejando $b = 3a/2$ en la primera y sustituyendo en la segunda, tenemos $a^2 = 18$, o sea $a = 3\sqrt{2}$, siendo $b = 9\sqrt{2/2}$. La altura h cumple $a^2 = (b/2)^2 + h^2$, o sea $h^2 = 18 - (81 \cdot 2/16) = 63/8$, siendo el volumen $V = b^2h/3 \simeq 37{,}88$ cm³.

Ejercicio B/13-5. Hallar las aristas lateral y básica de una pirámide cuadrangular regular, sabiendo que la suma de todas las aristas es 68 cm y que la altura de la pirámide es 7 cm.

Sean a la arista lateral, b la básica y h la altura. Tendremos

$$4a + 4b = 68, \quad h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2, \quad h = 7.$$

En la primera despejamos $a = 17 - b$, con lo que, sustituyendo en la segunda, $h = 7$, y operando, se obtiene $b^2 - 68b + 480 = 0$, cuyas soluciones son $b = 60$ o $b = 8$, siendo sólo admisible la segunda pues $a + b = 17$, por lo que será $a = 9$.

Ejercicio B/13-6. Un tronco de pirámide regular de bases cuadradas tiene 208 dm³ de volumen y los perímetros de sus bases son 16 dm y 40 dm. Hallar el área de la superficie lateral.

Sea a la apotema y h la altura (fig. 25). Se tiene

$$208 = \frac{h}{3}(40 + 100 + \sqrt{4.000}), \quad h^2 + 9 = a^2.$$

Despejando h en la primera y sustituyendo en la segunda se llega a $a \simeq 4{,}3$ dm. Finalmente

$$\text{Área lateral} \simeq \frac{16 + 40}{2} \cdot 4{,}3 = 120{,}4 \text{ dm}^2.$$

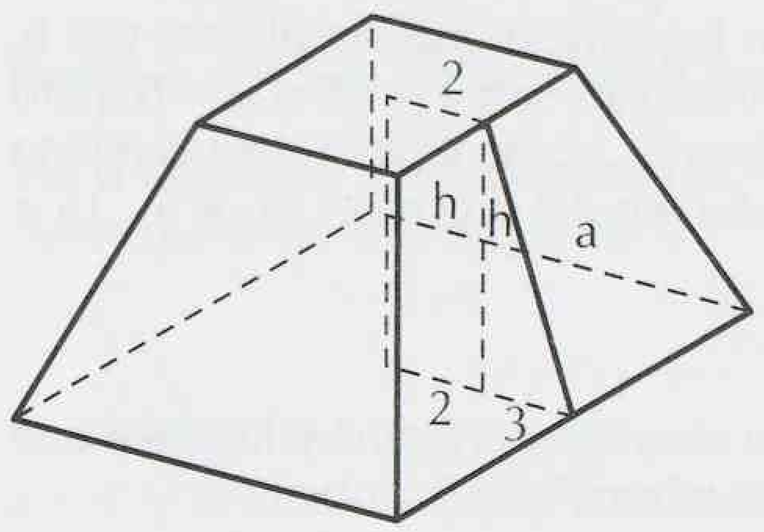


Fig. 25

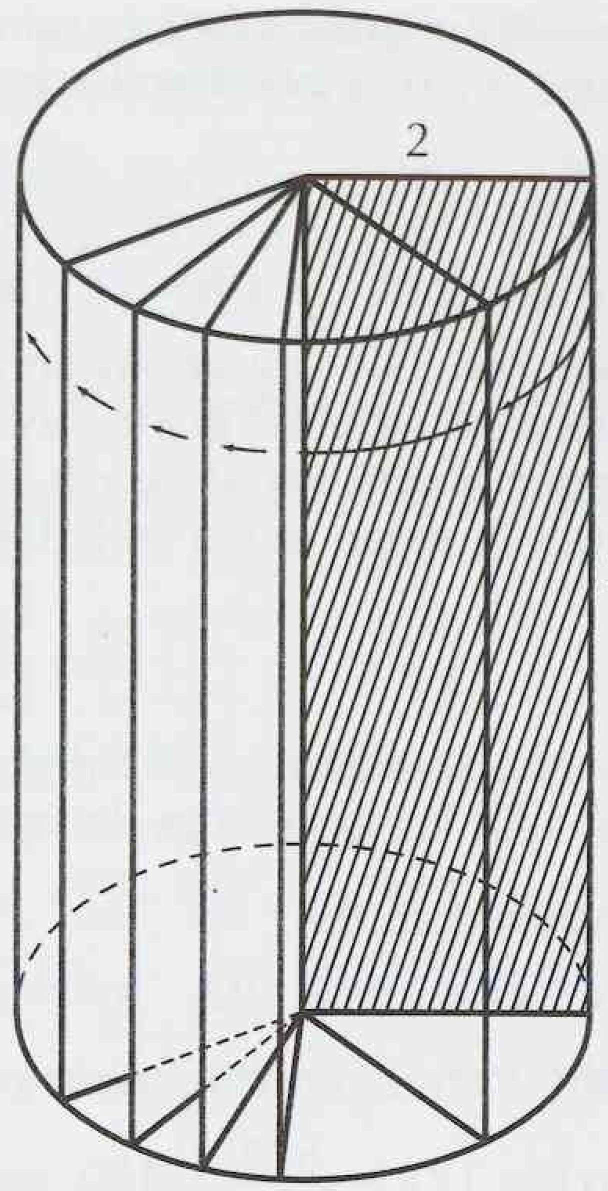


Fig. 26

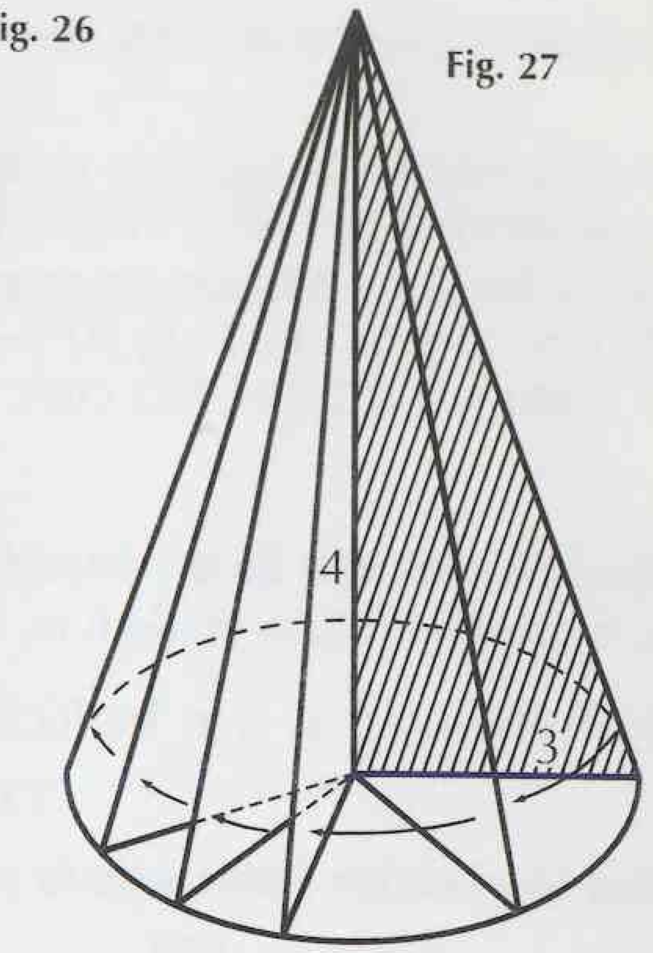


Fig. 27

Ejercicio B/14-1. Un rectángulo de lados 2 cm y 7 cm gira sobre el mayor de sus lados. ¿Qué cuerpo se obtiene y qué volumen tiene?

Es un cilindro de revolución (y vemos el porqué del nombre) de altura 7 y radio de la base 2 (fig. 26). El volumen es $\pi \cdot 2^2 \cdot 7 \simeq 88$ cm^3.

Ejercicio B/14-2. Un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 metros, gira en torno al mayor de ellos. ¿Qué cuerpo se obtiene y cuál es su área lateral?

Es un cono de revolución (y vemos el porqué del nombre) de altura 4 y radio de la base 3 (fig. 27). La generatriz g cumple $g = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por ello el área lateral es $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\ \pi \simeq 47{,}124$ cm^2.

Ejercicio B/14-3. ¿Cuál es el peso del agua que llena un vaso cilíndrico de hojalata sabiendo que el desarrollo de su superficie lateral es un cuadrado de 1 dm de lado?

Si r es el radio de la base y g la generatriz, sabemos que $2 \cdot \pi \cdot r = 1$ y $g = 1$. Luego el volumen es $V = \pi \cdot r^2 \cdot g = \pi \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{4\pi} \simeq 0{,}0796$ dm^3 = 79,6 cm^3 que darán un peso de 79,6 gramos.

Ejercicio B/14-4. El área lateral de un cono de revolución de 5 dm de radio es el triple del área de la base. Calcular el volumen del cono.

Si g es la generatriz, h la altura, sabemos que $\pi \cdot 5 \cdot g = 3\ (\pi \cdot 5^2)$, o sea $g = 15$, por lo que $h = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200}$ y el volumen es $V = (1/3) \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \sqrt{200} \simeq 370{,}24$ dm^3.

Ejercicio B/14-5. Los radios de un tronco de cono miden 20 y 14 cm y su altura 18 cm. Determinar el área lateral y el volumen del tronco.

Si g es la generatriz será $g^2 = 18^2 + (20 - 14)^2 = 360$, $A_{lat} = \pi \cdot \sqrt{360} \cdot (20 + 14) \simeq 2.026{,}656$ cm^2, $V = (1/3) \cdot \pi \cdot 18 \cdot (14^2 + 20^2 + 20 \cdot 14) \simeq 16.512{,}211$ cm^3.

Ejercicio B/14-6. El área de una esfera en metros cuadrados y la longitud de su circunferencia en metros vienen dados por el mismo número. Calcular el volumen de esta esfera.

Si R es el radio, se tiene $4\ \pi\ R^2 = 2\ \pi\ R$, o sea $R = 0{,}5$ m. Por tanto, el volumen es $V = (4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \simeq$ $\simeq 0{,}5236$ m^3.

Ejercicio B/14-7. Se trazan dos planos paralelos, uno de los cuales dista 4 cm del centro de una esfera de radio 12 cm y el otro pasa por él. Hallar el área de la zona esférica y el volumen del segmento esférico determinados.

Con las notaciones que se usaron en la ficha B/14, se tiene $r = 12$, $h = 4$, $a = 12$, $b^2 = 12^2 - 4^2 =$ $= 128$, por lo que

$$A_{zona} = 2\pi \cdot 12 \cdot 4 \simeq 301{,}6 \text{ cm}^2, \quad V_{segm.} = \frac{\pi \cdot 4^3}{6} + \frac{\pi \cdot 4}{2}\ (12^2 + 128) \simeq 1.742{,}537 \text{ cm}^3.$$

Ejercicio B/14-8. Calcular el área del huso esférico y el volumen de la cuña producidos en una esfera de radio 5 m con una amplitud de 51° 20′ 7″.

Expresada en grados, la amplitud es $51 + \frac{20}{60} + \frac{7}{3.600} \simeq 51{,}3853$ grados, luego

$$A_{huso} = \pi \cdot 5^2 \cdot (51{,}3853)/90 \simeq 44{,}84 \text{ cm}^2, \quad V_{cuña} = \pi \cdot 5^3 \cdot (51{,}3853)/90 \simeq 224{,}21 \text{ cm}^3.$$

Ejercicio C/1-1. Determinar las componentes de los vectores **u** y **v** que verifican el sistema $\left.\begin{array}{l} 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3\mathbf{a} \\ 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = 2\mathbf{b} \end{array}\right\}$ donde $\mathbf{a} = (1{,}2)$ y $\mathbf{b} = (2, 0)$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la suma y el producto de escalares en V_2, este sistema se puede resolver de igual forma que los sistemas numéricos lineales. Por ejemplo aplicando el método de reducción se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3\mathbf{a} \\ 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = 2\mathbf{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\mathbf{u} - 4\mathbf{v} = 6\mathbf{a} \\ -6\mathbf{u} - 15\mathbf{v} = -6\mathbf{b} \end{array}\right\} \Rightarrow -19\mathbf{v} = 6\mathbf{a} - 6\mathbf{b} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = -\frac{6}{19}\,\mathbf{a} + \frac{6}{19}\,\mathbf{b} \\ \mathbf{v} = \frac{15}{19}\,\mathbf{a} + \frac{4}{19}\,\mathbf{b} \end{array}\right\}.$$

Tomando componentes,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = \frac{16}{9}\ [-(1, 2) + (2, 0)] = \frac{6}{19}\ (1, -2) \\ \mathbf{v} = \frac{1}{19}\ [15\ (1, 2) + 4\ (2, 0)] = \frac{1}{19}\ (23, 30) \end{array}\right\};$$

finalmente se tiene

$$\mathbf{u} = \left(\frac{6}{19}, -\frac{12}{19}\right), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{23}{19}, \frac{30}{19}\right).$$

Ejercicio C/2-1. Si M es el punto medio de un segmento de extremos A y B, hallar una expresión que permita calcular las coordenadas de M a partir de las de A y B. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A = (1, -2)$ y $B = (3, 5)$ en el plano, y del segmento determinado por $P = (1, 1, -1)$ y $Q = (0, 2, 4)$ en el espacio.

Si M es el punto medio del segmento AB (ver figura 28), quiere decir que **AM** = **AB**/2, o sea $M = (A +$ $+ B)/2$, pues $M = A + (B - A)/2 = (A + B)/2$. Aplicando esta expresión a los dos casos propuestos se tiene $M = [(1, -2) + (3, 5)]/2 = (2, 3/2)$; análogamente en el espacio, $M = (P + Q)/2 = (1/2, 3/2, 3/2)$.

Ejercicio C/2-2. Hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento determinado por los puntos $A = (10, -5)$ y $B = (-5, 5)$ en cinco partes iguales.

El planteo es similar al del ejercicio C/2-1. Sean M_1, M_2, M_3 y M_4 los puntos del segmento AB que lo dividen cinco partes iguales, se tendrá entonces que $\mathbf{AM}_1 = \mathbf{AB}/5$, $\mathbf{AM}_2 = 2\mathbf{AB}/5$, $\mathbf{AM}_3 = 3\mathbf{AB}/5$ y $\mathbf{AM}_4 = 4\mathbf{AB}/5$. La primera relación implica que $M_1 - A = (B - A)/5$ de donde $M_1 = 4(A/5) + B/5 =$ $= (4/5) \cdot (10, -5) + (1/5) \cdot (-5, 5) = (-7, 3)$. De la misma forma se puede proceder con las otras tres condiciones y se obtiene: $M_2 = (4, -1)$, $M_3 = (1, 1)$ y $M_4 = (-2, 3)$.

Ejercicio C/2-3. Hallar las componentes del vector $\mathbf{a} = (1, -6)$ en la base constituida por los vectores $\mathbf{u} = (3, -4)$ y $\mathbf{v} = (1, 2)$.

$$\mathbf{a} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad (1, -6) = r\,(3, -4) + s\,(1, 2) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1 = 3r + s \\ -6 = -4r + 2s \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se tiene $r = -7/5$ y $s = 4/5$. Pot tanto $\mathbf{a} = (-7/5)\ \mathbf{u} + (4/5)\ \mathbf{v}$.

Ejercicio C/2-4. Dado un triángulo *ABC* y el punto medio *P* del lado *BC*, hallar las coordenadas del punto *M* situado sobre la recta que une *A* con *P*, de modo que su distancia a *A* sea 2/3 de la longitud total del segmento *AP*. Calcular las coordenadas de un punto análogo a partir de las otras dos rectas similares construidas desde los vértices *B* y *C*, respectivamente.

El segmento *AP* recibe el nombre de *mediana* sobre el lado *BC*. Las condiciones impuestas indican que **AM** = (2/3) **AP**, de donde $M - A = 2\,(A - P)/3$. Teniendo en cuenta que $P = (B + C)/2$, se tendrá que $\mathbf{M} = (2\mathbf{P}/3) + \mathbf{A} - (2\mathbf{A}/3) = (2\,(B + C)/6) - (A/3) = (A + B + C)/3$.
Si se realiza un cálculo semejante para derivar los puntos similares construidos sobre las medianas correspondientes a los lados *B* y *C*, respectivamente, se obtendrá el mismo valor: $(A + B + C)/3$. Por tanto se concluye que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado *baricentro* del triángulo.

Ejercicio C/2-5. Demostrar que al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, se obtiene un paralelogramo.

Sea el cuadrilátero de vértices *A, B, C,* y *D*, y sean *M, N, P* y *Q* los vértices de la figura que se obtiene al unir los puntos medios del cuadrilátero *ABCD*. Habrá que demostrar que **MN** = **PQ** (fig. 29). Por ser *M* el punto medio de *AB*, se tiene que $M = (A + B)/2$, análogamente, $N = (B + C)/2$. Por tanto, se tendrá que $\mathbf{MN} = N - M = (B + C)/2 - (A + B)/2 = (C/2) - (A/2)$.
Por ser *P* el punto medio de *CD* se tendrá que $P = (C + D)/2$, y al igual que antes, $Q = (D + A)/2$. Por tanto, $\mathbf{PQ} = P - Q = [(C + D)/2] = (C/2) - (A/2)$. Es decir, se ha demostrado que **MN** = **PQ**, en consecuencia *MNPQ* es un paralelogramo.

Ejercicio C/3-1. Una recta pasa por el punto $A = (-3, 0)$ y tiene como vector director $\mathbf{v} = (2, -1)$. Escribir la ecuación de estas rectas en sus formas más importantes.

Dado un punto $P = (x, y)$ del plano, se tendrá que la ecuación vectorial de la recta será $(x, y) = (-3, 0) + r\,(2, -1)$, con $r \in \mathbf{R}$. Las ecuaciones paramétricas serán $x = -3 + 2r$ y $y = -r$. Eliminando el parámetro *r* del sistema formado por las dos ecuaciones paramétricas se obtiene la ecuación continua: $(x + 3)/2 = y/(-1)$. Despejando los denominadores de la ecuación continua se deriva la ecuación general: $x + 2y + 3 = 0$. Finalmente, si se despeja la *y*, se obtiene la ecuación explícita, $y = (-x/2) - (3/2)$.

Ejercicio C/3-2. Una recta corta los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas de modo que forma con ellos un triángulo de 12 unidades de área, además la recta pasa por el punto (6, –8). Hallar su ecuación.

Sean $(a, 0)$ y $(0, b)$ los puntos de intersección de la recta con el eje de abscisas y el de ordenadas del sistema de referencia, respectivamente. Si la ecuación de dicha recta es $y = mx + n$, se cumplirá que

$$\left.\begin{array}{l} 0 = ma + n \\ b = 0a + n \\ -8 = 6m + n \end{array}\right\}\text{, pues pasa por } (a, 0),\ (b, 0) \text{ y } (6, -8).$$

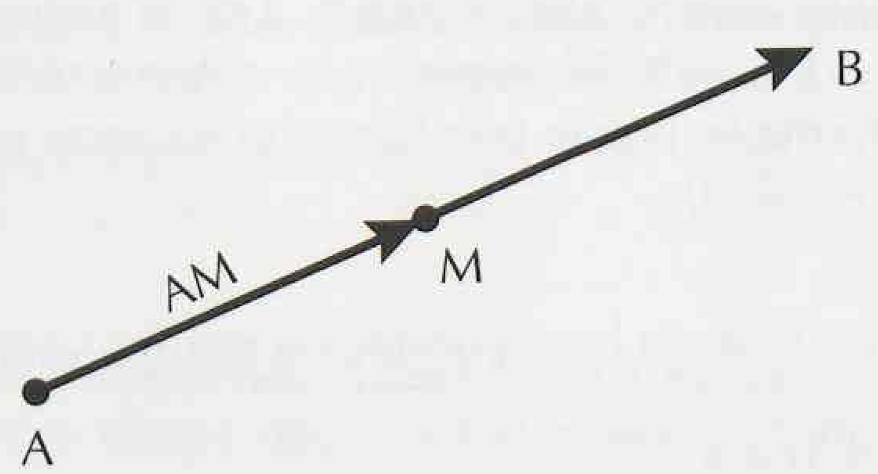


Fig. 28

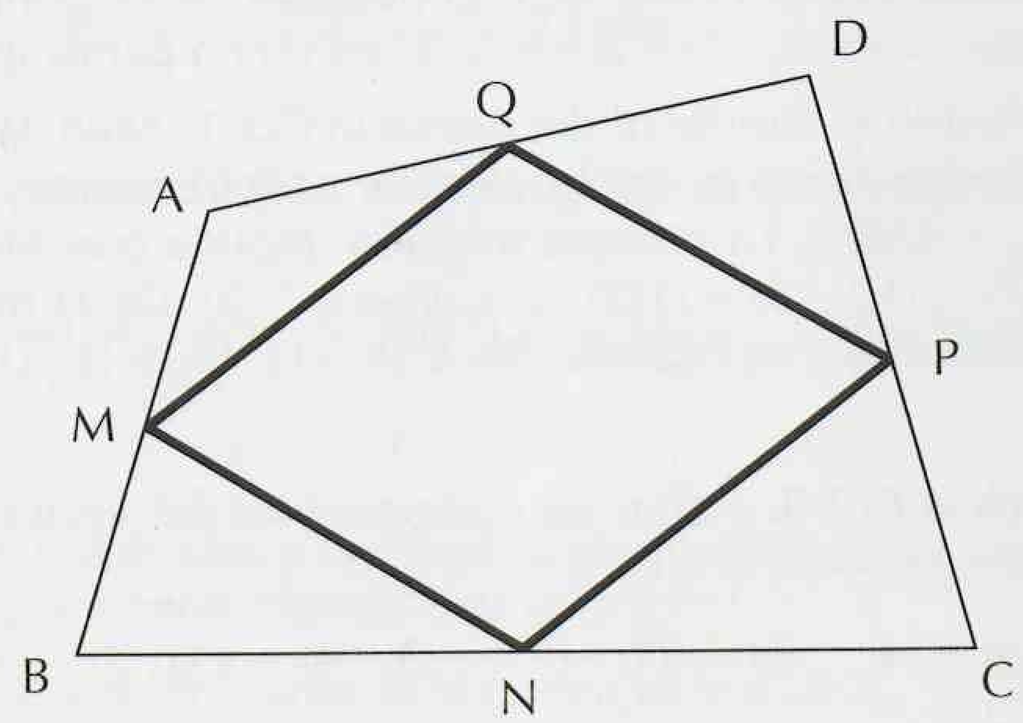


Fig. 29

Como además el área del triángulo vale $12 = \pm ab/2$, eliminando *n* del sistema anterior se obtiene (véase nota final) el sistema

$$\begin{cases} ab = 24 \\ 0 = ma + b \\ -8 = 6m + b \end{cases} \text{ despejando } m, \quad \begin{cases} ab = 24 \\ 8a = 6b - ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 24 \\ 8a = 6b - 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 24/b \\ b^2 - 4b - 32 = 0 \end{cases}$$

de donde $b = 8$ y $a = 3$, o también $b = -4$ y $a = 6$. Como $n = -b$, se tiene que *m* puede valer 8/3 o –2/3, respectivamente. Por tanto las dos posibles soluciones son la recta $y = (-8x/3) + 8$ y la recta $y = (-2x/3) - 4$. (NOTA: Debe hacerse un sistema idéntico con $ab = -24$. Compruebe el lector que, sin embargo, en esta ocasión no proporciona más soluciones).

Ejercicio C/3-3. Determinar las rectas paralela y perpendicular a la recta $y = 3x/2 + 2$ que pasa por el punto (–2, 1).

La ecuación de la recta paralela será de la forma $y = (3x/2) + n$, y como tiene que pasar por el punto (–2, 1) se tendrá $1 = (3\,(-2)/2) + n \Rightarrow n = 4$. La ecuación será pues $y = 3x/2 + 4$. De forma análoga para la perpendicular se tendrá, $y = (-2x/3) + n \Rightarrow 1 = (-2\,(-2)/3) + n \Rightarrow n = -1/3$, por tanto la ecuación de la recta perpendicular es $y = (-2x/3) - 1/3$.

Ejercicio C/3-4. Determinar el valor de *a* para que las rectas $2ax + (a - 5)\,y = a$, $9x - ay = -8$ sean: (*a*) paralelas, (*b*) perpendiculares.

Aplicando la condición de paralelismo para las pendientes ($m = m'$), se tiene que $-\dfrac{2a}{a-5} - \dfrac{9}{-a} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a^2 + 9a - 45 = 0$, cuyas soluciones son 3 y –15/2.
La condición de perpendicularidad, aplicada a las pendientes ($mm' = -1$), da lugar a la ecuación $\left[-\dfrac{2a}{a-5}\right]\left[-\dfrac{-9}{a}\right] = -1$, de donde se tiene $a^2 - 23a = 0$, cuyas soluciones son 23 y 0.

Ejercicio C/4-1. Hallar las coordenadas del punto del plano simétrico al $P = (3, 11)$, respecto a la recta de ecuación $x - 2y + 4 = 0$ (fig. 30).

Si *Q* es el punto simétrico de *P* respecto a la recta, entonces *PQ* será perpendicular a la recta. Si $Q = (a, b)$, entonces $\mathbf{PQ} = (a - 3, b - 11)$ será paralelo al vector (1, –2). Por otra parte, si *M* es el punto medio del segmento *PQ*, *M* deberá pertenecer a la recta dada, o sea, $M = [(a + 3)/2, (b + 11)/2]$ deberá satisfacer $x - 2y + 4 = 0$. Se tendrá por tanto el sistema

$$\left.\begin{array}{l} (a - 3)/(+1) = (B - 11)/(-2) \\ (a + 3)/2 - 2 \cdot (b + 11)/2 + 4 = 0 \end{array}\right\} \text{ cuya solución es } Q = (a, b) = (9, -1).$$

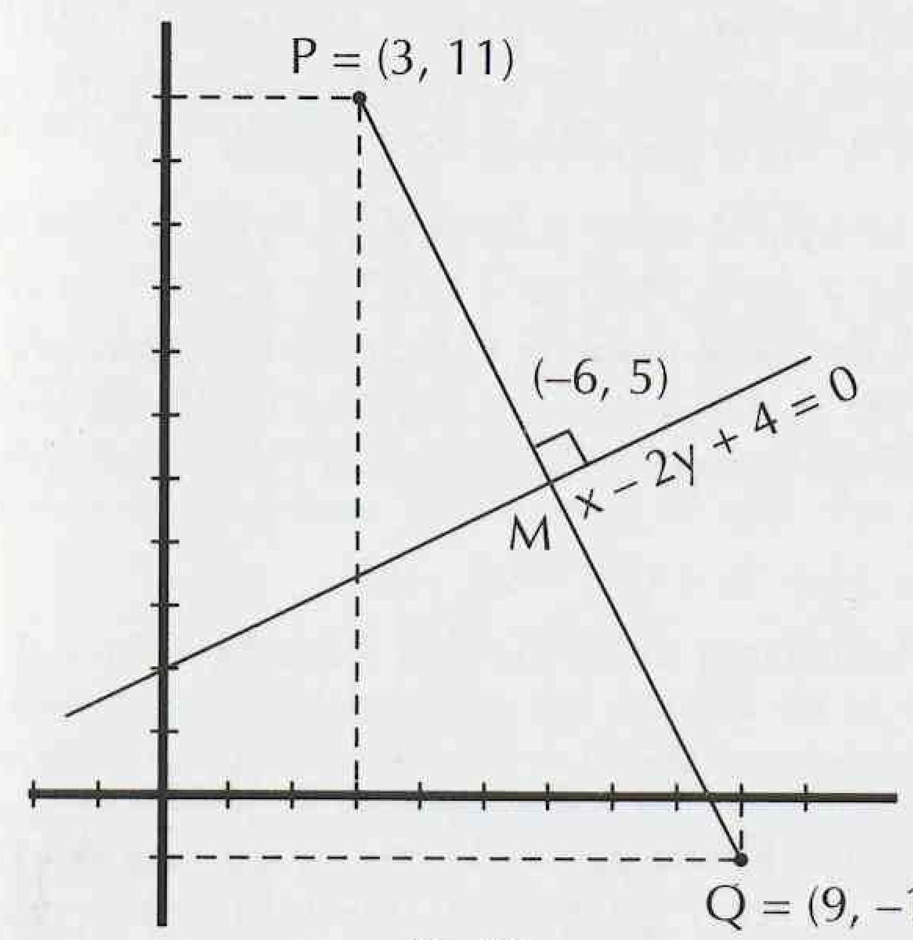


Fig. 30

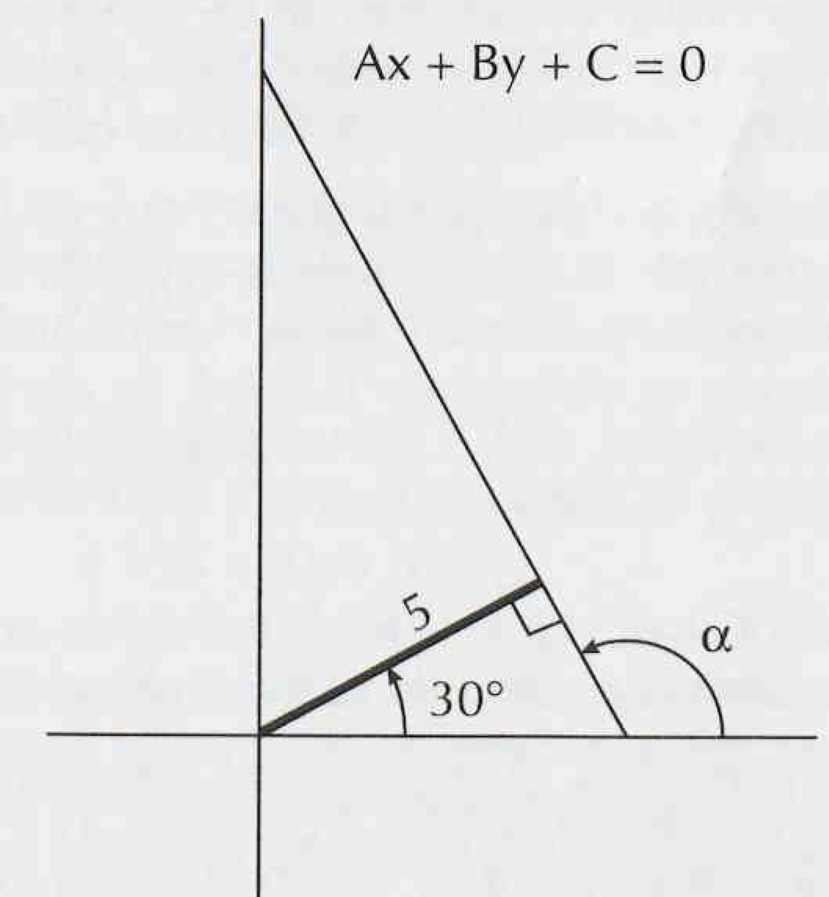


Fig. 31

Ejercicio C/4-2. Dados los puntos $M = (-8, 0)$, $N = (12, 0)$ y $P = (4, 16)$, hallar las ecuaciones de las rectas determinadas por las tres alturas del triángulo y probar que son concurrentes.

Sea r la recta determinada por la altura trazada desde P al lado opuesto del triángulo. Como r es perpendicular al lado MN también lo es al vector $\mathbf{MN} = (12 - (-8), 0 - 0)$. Además r pasará por P, es decir se cumplirá $20\,(x - 4) + 0\,(y - 16) = 0$ con lo que $x - 4 = 0$.
Procediendo de forma análoga con las alturas desde M y N, se obtendrán las ecuaciones correspondientes: $x - 2y + 8 = 0$, $3x + 4y - 36 = 0$. Para ver que estas tres rectas son concurrentes en un punto basta comprobar que la tercera de ellas pasa por el punto de corte de las dos primeras, que es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 8 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right\}$; la solución es $(4, 6)$, que cumple la tercera ecuación.
Este punto se denomina *ortocentro* del triángulo.

Ejercicio C/4-3. Una recta pasa a 5 unidades de longitud de distancia del origen de coordenadas y el segmento perpendicular que la une con éste forma un ángulo de 30° con el semieje x positivo. Hallar la ecuación de dicha recta.

Tal como puede verse en la figura 31, el ángulo α valdrá $180° - (90° - 30°) = 120°$ pues el triángulo OMN es rectángulo. La recta será pues $y = \operatorname{tg} 120° \cdot x + n$ o sea $y = -\sqrt{3}x + n$. Como la distancia de origen vale 5, se tendrá que
$$d(O, r) = 5 = \frac{|-\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 0 + n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}}$$ será $n = \pm 10$. Por tanto, $y = -\sqrt{3}x + 10$, o $y = -\sqrt{3}x - 10$.
Sin embargo, la construcción gráfica muestra que sólo la primera solución es buena ya que la segunda da lugar a un ángulo de 120° en lugar de 30°.

Ejercicio C/4-4. Las coordenadas del vértice P de un cuadrado son $(-2, 3)$. Hallar las coordenadas de los otros tres vértices sabiendo que una de sus diagonales se halla sobre la recta $3x + y - 7 = 0$.

La recta que pasa por P y es perpendicular a la diagonal $3x + y - 7 = 0$, será $-(x + 2) + 3\,(y - 3) = 0$ es decir, $x - 3y + 11 = 0$. La intersección de las diagonales, M, será la solución del sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, $\left.\begin{array}{l} x - 3y + 11 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{array}\right\}$ cuya solución es $M = (1, 4)$. Las coordenadas del punto $R = (a, b)$, simétrico de M respecto a P, cumplirán la condición $[(a + (-2)]/2, (b + 3)/2) = (1, 4)$, por tanto, $R = (4, 5)$.
Para calcular las coordenadas de los vértices del cuadrado sobre la diagonal definida por $3x + y - 7 = 0$, basta imponer la condición de que la longitud del lado sea $\sqrt{2}$ veces mayor que la de la semidiagonal. Es decir, si Q es uno de estos vértices $|\mathbf{PQ}| = |\mathbf{PM}| \cdot \sqrt{2}$ o sea $|\mathbf{PQ}|^2 = 2|\mathbf{PM}|^2$, que junto con la condición de que $Q = (m, n)$ pertenezca a la diagonal, nos da el sistema
$\left.\begin{array}{l} (m + 2)^2 + (n - 3)^2 = 2\,(1 + 2)^2 + (4 - 3)^2 \\ 3m + n = 7 \end{array}\right\}$ Resolviéndolo se obtienen dos soluciones: $(0, 7)$ y $(2, 1)$.
Por tanto los vértices del cuadrado son $(-2, 3)$, $(4, 5)$, $(0, 7)$ y $(2, 1)$.

Ejercicio C/4-5. Los vértices de un paralelogramo se hallan todos en el primer cuadrante, siendo el $(7, 0)$ y el $(1, 2)$ los de un mismo lado. Calcular el punto de intersección de las diagonales y los otros dos vértices sabiendo que la diagonal que pasa por $(7, 0)$ tiene pendiente -3 y la otra $1/5$.

La ecuación de la diagonal por $(7, 0)$ y de pendiente -3 es $y = -3\,(x - 7)$ es decir $3x + y - 21 = 0$. Análogamente, la ecuación de la segunda diagonal será $y - 2 = (1/5)\,(x - 1)$ o sea $x - 5y + 9 = 0$. Para obtener el punto de intersección de ambas diagonales basta resolver el sistema formado por sus ecuaciones; se obtiene $x = 6$, $y = 3$, es decir el punto $(6, 3)$. Los otros dos vértices serán los puntos simétricos de $(7, 0)$ y $(1, 2)$ respecto a $(6, 3)$; procediendo como en el ejercicio C/4-1, se obtiene $(5, 6)$ y $(11, 4)$, respectivamente.

Ejercicio C/4-6. Hallar la ecuación de los puntos del plano cuya distancia a la recta $3x + 4y + 1 = 0$ sea de cuatro unidades de longitud. ¿Qué figura es?

Sea un punto $P\,(x, y)$ un punto del plano, tal que su distancia a esta recta valga 2, se tendrá, $d(P, r) = 2 = |(3x + 4y + 1)/\sqrt{3^2 + 4^2}| = |(3x + 4y + 1)/5|$. Esta ecuación se desdobla en dos a causa del valor absoluto: $10 = 3x + 4y + 1$, $-10 = 3x + 4y + 1$. Es decir, el lugar geométrico buscado consta de dos rectas paralelas a la dada: $3x + 4y + 11 = 0$, $3x + 4y - 9 = 0$.

Ejercicio C/4-7. El vértice de un triángulo se halla en $(2, -7)$. Hallar las coordenadas de los otros vértices sabiendo que la ecuación de una altura es $3x + y - 11 = 0$, y la de una mediana $x + 2y + 7 = 0$, ambas de vértices distintos.

Sean $A = (2, -7)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ las coordenadas de los vértices. Si la mediana corresponde al vértice C, se verificará la ecuación $c_1 + 2c_2 + 7 = 0$; además, el punto medio del lado A también cumplirá esa ecuación, $(2 + b_1)/2 + 2\,[(b_2 - 7)/2] + 7 = 0$. Si la altura corresponde al vértice B, se verificará $3b_1 + b_2 + 11 = 0$; además, el vector $\mathbf{AC}$ será perpendicular a un vector director de la recta $3x + y + 11 = 0$, es decir, $(2 - c_1, -7 - c_2) = \lambda\,(3, 1)$. Se tendrá por tanto el sistema
$$\left.\begin{array}{l} c_1 + 2c_2 + 7 = 0 \\ c_1 = 2 - 3\lambda \\ c_2 = -7 - \lambda \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} 3b_1 + b_2 + 11 = 0 \\ b_1 + 2b_2 + 2 = 0 \end{array}\right\},$$
cuyas soluciones son $\lambda = -1$, $b_1 = -4$, $c_2 = 1$, $c_1 = 5$, $c_2 = 6$. Por lo tanto los vértices del triángulo serán $(2, -7)$, $(-4, 1)$ y $(5, 6)$.

Ejercicio C/5-1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (2, 1)$, $B = (-2, 3)$ y cuyo centro se halla sobre la recta $x + y + 4 = 0$.

Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, por pasar por A y B se verificará que $4 + 1 - 4a - 2b + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, $4 + 9 + 4a - 6b + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Si el centro de la circunferencia se halla sobre la recta $x + y + 4 = 0$, se cumplirá que $a + b - 4 = 0$. Simplificando estas expresiones se tendrá,
$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 - r^2 = 0 \\ a^2 + b^2 + 4a - 6b + 13 - r^2 = 0 \\ a + b + 4 = 0 \end{array}\right\}, \text{ restando } \left.\begin{array}{l} 2a - b = -2 \\ a + b + 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (a, b) = (-2, -2).$$
El radio será la distancia entre $(-2, -2)$ y $(2, 1)$ que vale 5.

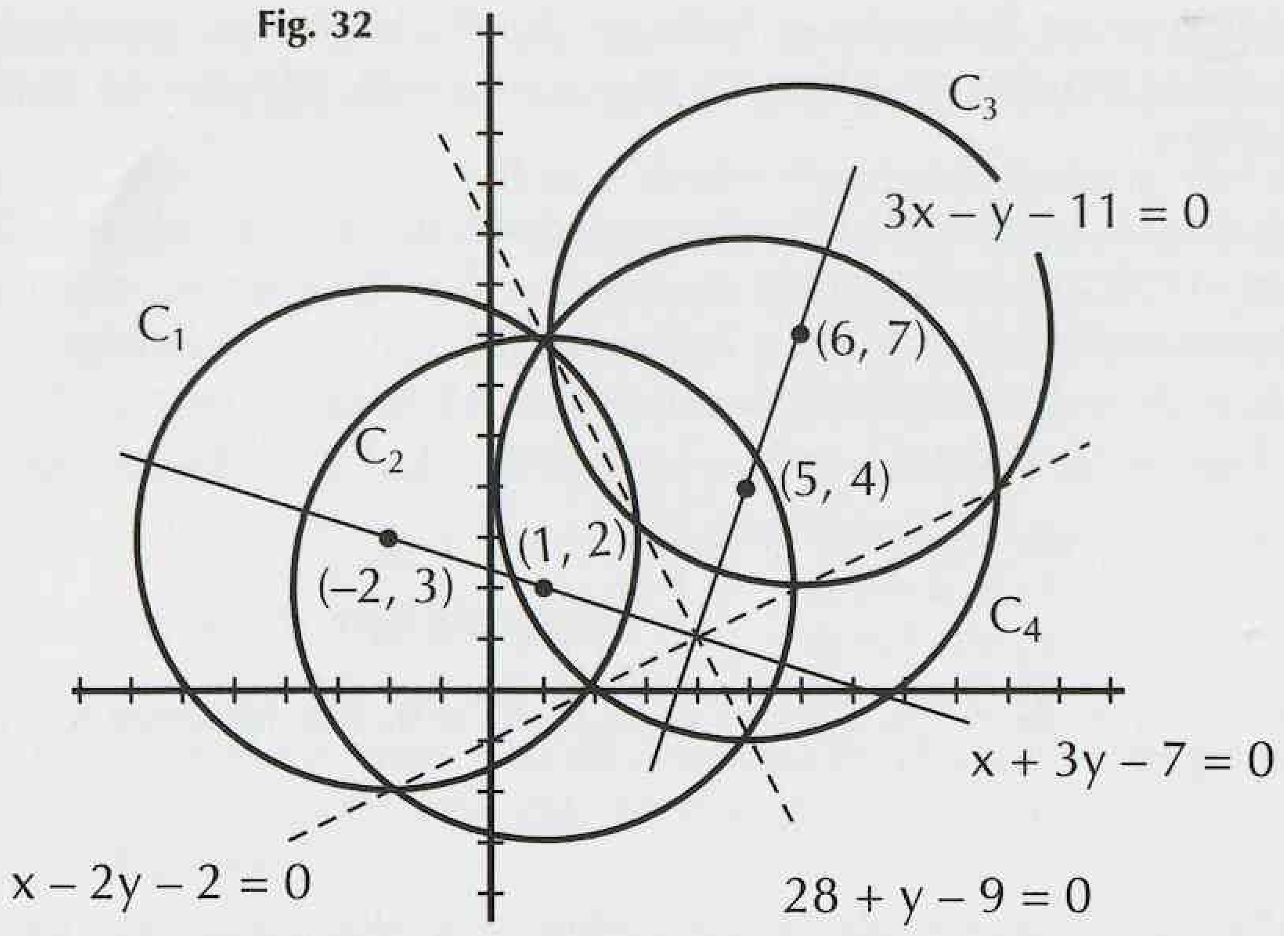
Ejercicio C/5-2. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente al eje de ordenadas y que pasa por los puntos $A = (2, -1)$, $B = (1, 6)$.

Por pasar por A y B se tienen las ecuaciones (ver C/5-1) $4 + 1 - 4a + 2b + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ y $1 + 3 - 2a + (-12b) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Como en este caso la condición de tangencia implica que $r = a$, se tendrá
$$\left.\begin{array}{l} 5 - 4a + 2b + b^2 = 0 \\ 37 - 2a - 12b + b^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} a = (5 + 2b + b^2)/4 \\ a = (37 + 12b + b^2)/2 \end{array}\right\}$$
de donde $5 + 2b + b^2 = 74 - 24b + 2b^2$. Resolviendo esta ecuación se obtienen dos soluciones: $b = 3$ y $a = 5$, o $b = 23$ y $a = 145$. Por tanto las ecuaciones de las circunferencias son $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 290x - 46y + 529 = 0$.

Ejercicio C/5-3. Una circunferencia tiene su centro en las bisectrices del ángulo formado por la recta que corta al eje de abscisas en el punto 2 y cuya pendiente vale 1/2, y la recta perpendicular a ésta que pasa por el punto $(3, 3)$. Si la circunferencia pasa por el punto $(1, 7)$ y tiene radio 5, hallar su ecuación.

La ecuación de la recta será $y - 0 = (1/2)\,(x - 2) \Rightarrow x - 2y - 2 = 0$. La ecuación de la perpendicular por $(3, 3)$ será $y - 3 = -2\,(x - 3) \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$. Las ecuaciones de las bisectrices vendrán dadas por $(x - 2y - 2)/\sqrt{1 + 4} = \pm(2x + y - 9)\,\sqrt{1 + 4} \Rightarrow x - 2y - 2 = \pm(2x + y - 9)$, es decir las dos bisectrices son $x + 3y - 7 = 0$, $3x - y - 11 = 0$.
Por pasar por $(1, 7)$ la ecuación de la circunferencia cumplirá que $1 + 49 - 2a - 14b + a^2 + b^2 - 25 = 0 \Rightarrow 25 - 2a - 14b + a^2 + b^2 = 0$. Por tanto las soluciones de los dos sitemas de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{l} 25 - 2a - 14b + a^2 + b^2 = 0 \\ a + 3b - 7 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} a = (5 + 2b + b^2)/4 \\ 3a - b - 11 = 0 \end{array}\right\}$$
nos darán las coordenadas del centro de la circunferencia. Eliminando a en el primer sistema se obtiene la ecuación $b^2 - 5b + 6 = 0$, cuyas soluciones son 3 y 2; en consecuencia hay dos posibles centros: $(-2, 3)$ y $(1, 2)$. Resolviendo el segundo sistema de ecuaciones de forma análoga, se encuentran también dos centros: $(6, 7)$ y $(5, 4)$. Por tanto existen cuatro posibles soluciones para este problema. En la figura 32 puede verse la comprobación gráfica de ello.

Fig. 32



Ejercicio C/5-4. Hallar la posición relativa de la recta r que pasa por $P = (1, 4)$ y $Q = (-3, 2)$, respecto a la circunferencia de centro $O = (2, 1)$ y radio 7.

La ecuación de la recta es $(x - 1)/(-3 - 1) = (y - 4)/(2 - 4) \Rightarrow 3x - 2y + 5 = 0$. La distancia del centro de la circunferencia a la recta es $d^2(O, r) = [3 \cdot 2 - 2(-1) + 5]^2/[3^2 + (-1)^2] = 13 < 7^2$. Por tanto la recta es secante a la circunferencia.

Ejercicio C/5-5. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, hallar las tangentes por el punto $P = (3, 2)$.

Una recta por P tendrá una ecuación de la forma $y = a(x - 3) + 2 = ax - 3a + 2$. Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se obtendrá una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes dependerán de a. Como las rectas han de ser tangentes, el discriminante de esta ecuación tiene que ser nulo, así el punto de corte de la recta y la circunferencia será único. Sustituyendo la ecuación de la recta en la de la circunferencia se tiene, $x^2 + (ax - 3a + 2)^2 = 4$ o sea $(1 + a^2)\,x^2 + (4a - 6a^2)\,x + (9a^2 - 12a) = 0$. Tomando el discriminante de esta ecuación, se tendrá $(4a - 6a^2)^2 - 4(1 + a^2)(9a^2 - 12a) = 0$; operando esta expresión se obtiene $-4a(5a - 12) = 0$, por tanto $a = 0$ o $a = 12/5$. Sustituyendo el valor de a se tendrán dos tangentes a la circunferencia: $y = 2$, $12x - 5y - 26 = 0$.

Ejercicio C/5-6. Hallar el centro radical de las circunferencias c, c' y c'', de ecuaciones $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$, respectivamente.

Para hallar el eje radical hay que determinar el eje radical de dos pares de circunferencias y a continuación buscar su intersección. El eje radical de c y c' es $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$ o sea $2x + 3y = 8$; procediendo análogamente con c' y c'', se obtiene $10x + 2y - 21 = 0$. El centro radical estará en la intersección de estas dos rectas, $P = (-79/26, 122/26)$.

Ejercicio C/6-1. Hállese la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje XX' y son simétricos respecto al origen de coordenadas, según se sepa que: (*a*) sus semiejes son 4 y 3; (*b*) su eje mayor es 10 y la distancia focal 8; (*c*) su eje mayor es 30 y la excentricidad $\varepsilon = 4/5$; (*d*) la distancia focal es 6 y la excentricidad $\varepsilon = 3/5$.

(*a*) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ($a = 4$; $b = 3$).

(*b*) $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. La ecuación será $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

(*c*) $\left.\begin{array}{l} a = 15 \\ c/a = 4/5 \end{array}\right\}$ de donde $c = 12 b^2 = a^2 - c^2 = 81$, y la ecuación es $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{81} = 1$.

(*d*) $\left.\begin{array}{l} c = 3 \\ c/a = 3 \end{array}\right\}$ resulta $a = 5$, $b^2 = 16$, y la ecuación es: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Ejercicio C/6-2. Dada la elipse $36x^2 + 100y^2 = 900$, hallar: (*a*) sus semiejes; (*b*) las coordenadas de sus focos; (*c*) su excentricidad.

Dividiendo por 900, se escribe la ecuación de la elipse en forma reducida:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ entonces}$$

(*a*) $a = 5$, $b = 3$.

(*b*) $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, es decir $c = 4$, y las coordenadas de los focos son $F(4, 0)$ y $F(-4, 0)$.

(*c*) $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$.

Ejercicio C/6-3. Hállese la ecuación de la elipse con eje mayor sobre el eje XX' y centro en el origen de coordenadas, según se sepa que 1) el punto $P(5\sqrt{3}, 2)$ es de la elipse, y su semieje menor $b = 4$; 2) los puntos $A(4, \sqrt{3})$ y $B(-2\sqrt{2}, 3)$ son de la elipse; 3) el punto $A(-2, 5/3)$ es de la elipse y su excentricidad es 2/3.

1) Si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de la elipse, se cumplirá $\dfrac{(5\sqrt{3})^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{16} = 1$ de donde $a^2 = 100$, y la ecuación será $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

2) Sustituyendo las coordenadas de los puntos en la ecuación de la elipse, resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1 \\[2mm] \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{array}\right\}$$

Una manera fácil de resolverlo es hacer $\dfrac{1}{a^2} = x_1$, $\dfrac{1}{b^2} = y$, con lo que queda $\left.\begin{array}{l} 16x + 3y = 1 \\ 8x + 9y = 1 \end{array}\right\}$ y resulta $x = \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{a^2}$, $y = \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{b^2}$. La ecuación será $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

3) Se tienen las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{25/9}{b^2} = 1 \\[2mm] \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3} \\[2mm] a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\}$$

De aquí resulta $b^2 = 5$, $a^2 = 9$ con lo que la ecuación es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Ejercicio C/7-1. Determínese el valor de m si la recta $y = 5x + m$ es respecto a la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$, 1) tangente; 2) la corta en dos puntos; 3) no corta a la hipérbola.

Hallamos la intersección de la recta y la hipérbola mediante el sistema

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \\[2mm] y = 5x + m \end{array}\right\}$ De aquí resulta la ecuación $425x^2 + 160mx + 16m^2 - 400 = 0$ [1].

1) Si la recta y la hipérbola son tangentes, la ecuación [1] tiene solución única, es decir, su discriminante $\triangle$ debe ser igual a cero. $\triangle = -1.600m^2 + 6.800$.
Si $\triangle = 0$, $m^2 = 425$, o bien $m = \pm\sqrt{425}$.

2) En este caso $\triangle$ es positivo, resulta $-\sqrt{425} < m < \sqrt{425}$.

3) Ahora el discriminante debe ser negativo (el sistema no tiene solución)

$$m > +\sqrt{425} \quad \text{o} \quad m < -\sqrt{425}.$$

Ejercicio C/7-2. Las asíntotas de una hipérbola son las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$, y sus focos los puntos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$. Hállese la ecuación reducida.

Despejando y de cada una de las ecuaciones de las asíntotas, queda: $y = -x$; $y = x$, es decir, $y = \pm x$.
Como las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ resulta, $\frac{b}{a} = 1$.
De otro lado, al ser los focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$, resulta que $c = 4$. Se tiene, pues:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 16 \\ \frac{b}{a} = 1 \end{array}\right\} \text{ de donde } a = b = 2\sqrt{2}, \text{ y la ecuación reducida es } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Ejercicio C/7-3. Hállese la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, según se sepa que: 1) la parábola está situada en el semiplano de las abscisas positivas, es simétrica respecto al eje OX y su parámetro es $p = 0{,}5$; 2) la parábola está situada en el semiplano de las abscisas negativas, es simétrica respecto OX' y su parámetro es $p = 3$; 3) la parábola está situada en el semiplano de las ordenadas positivas, es simétrica respecto al eje OY, y su parámetro es $p = 0{,}5$; 4) la parábola está situada en el semiplano de las ordenadas negativas, es simétrica respecto al eje OY' y su parámetro es $p = 3$.

1) La ecuación viene dada en este caso por $y^2 = 2px$, es decir, $y^2 = x$.
2) En este caso es $y^2 = -2px$, con lo que $y^2 = -6x$.
3) En este caso la ecuación es $x^2 = 2py$, luego $x^2 = y$.
4) La ecuación viene dada por $x^2 = -2py$, es decir, $x^2 = -6y$.

Ejercicio C/7-4. Hallar la ecuación de la parábola de foco $F(4, 3)$ y directriz la recta r de ecuación $x - y + 1 = 0$.

Un punto $P(x, y)$ de la parábola ha de cumplir $d(P, F) = d(P, r)$, en consecuencia se tiene:

$\sqrt{(x - y)^2 + (y - 3)^2} = \dfrac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$; elevado ambos miembros al cuadrado resulta:
$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 30x - 22y + 99 = 0$, que es la ecuación de una parábola no simétrica respecto a los ejes de coordenadas.

Ejercicio C/8-1. Escribir las ecuaciones de una recta incidente con los puntos del espacio $P = (1, 2, 0)$, $Q = (3, -1, 2)$. Hallar la ecuación de la recta definida por los planos $3x - 2y + z - 1 = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$.

Las ecuaciones paramétricas serán $\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda(3 - 1) \\ y = 2 + \lambda(-1 - 2) \\ z = 0 + \lambda(2 - 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$ es decir, el vector director de la recta es el $(2, -3, 2)$. La ecuación continua será $(x - 1)/2 = (y - 2)/(-3) = z/2$.
Las ecuaciones reducidas se deducen de las continuas:

$$\left.\begin{array}{l} (x - 1)/2 = z/2 \\ (y - 2)/(-3) = z/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - z - 1 = 0 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\};$$

estas dos últimas ecuaciones expresan la recta como intersección de planos.
Para hallar la ecuación reducida de la recta definida en segundo lugar, basta tener en cuenta que estos planos no son paralelos y expresar dos variables en función de la tercera, $\left.\begin{array}{l} x = 3z/5 - 1/5 \\ y = 7z/5 - 4/5 \end{array}\right\}$. De la forma continua $\dfrac{x + 1/5}{3/5} = \dfrac{y + 1/4}{7/5} = \dfrac{z}{1}$, se deduce que un vector director será $(3/5, 7/5, 1)$.

Ejercicio C/8-2. Hallar la ecuación del plano incidente con los puntos $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (0, 1, 1)$. ¿Pertenece al plano el punto $(2, 1, 0)$?

La ecuación vectorial del plano sera $(x, y, z) = P + \lambda\,\mathbf{PQ} + \delta\,\mathbf{QR} = (1, 1, 0) + \lambda\,(0, -1, 1) + \delta\,(-1, 1, 0)$, que en forma paramétrica es $x = 1 - \delta$, $y = 1 - \lambda + \delta$, $z = \lambda$. Despejando λ y δ se obtiene la forma general $x + y - z + 2 = 0$. Para saber si el punto $(2, 1, 0)$ pertenece al plano debe verificarse si cumple la ecuación; como $2 + 1 - 0 + 2 \neq 0$, el punto no pertenece al plano.

Ejercicio C/8-3. Hallar el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (-3, 2, 5)$ y $\mathbf{v} = (-3, 6, -3)$. Determinar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u}$ y los cosenos directores de $\mathbf{u}$.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2}\cos\alpha = (-3)(-3) + 2 \cdot 6 + 5(-3)$ luego $\cos\alpha = 0{,}13$ y es $\alpha = 82{,}4°$. un vectro unitario $\mathbf{u}/|\mathbf{u}| = (-3, 2, 5)/\sqrt{38} = (-3/\sqrt{38}, 2/\sqrt{38}, 5/\sqrt{38})$ y cada una de estas componentes representa los cosenos directos del vector $\mathbf{u}$.

Ejercicio C/9-1. Dados los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, -4, 5)$ y $\mathbf{w} = (2, 1, 0)$, determinar (*a*) $\mathbf{u} \times 3\,\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$; (*b*) $\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ y $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Comprobar que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ para cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-2 \cdot 5 - 1(-4), 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 5, 1 \cdot (-4) - (-2)(-3)] = (-6, -8, -10)$. De igual forma $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (6, 8, 10)$.
(*b*) $\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (2, 1, 0) \times (-6, -8, -10) = (-10, 20, -10)$.
Para comprobar la expresión propuesta basta tomar coordenadas y desarrollar. Si $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (d, e, f)$, se tendrá que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (bf - ec, cd - af, ae - bd) \Rightarrow |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (bf - ec)^2 + (cd - af)^2 + (ae - bd)^2 = b^2f^2 + e^2c^2 - 2bfec + c^2d^2 + a^2f^2 - 2cdaf + a^2e^2 + b^2d^2 - 2aecd$ que tiene que ser igual a $(a^2 + b^2 + c^2)(e^2 + f^2 + d^2) - (ae + bf + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) - a^2e^2 - b^2f^2 - c^2d^2 - 2aebf - 2aecd - 2bfcd$. Simplificando y reagrupando se tiene finalmente $b^2f^2 + e^2c^2 + c^2d^2 + a^2f^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + a^2e^2 + b^2e^2 + c^2f^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(e^2 + f^2 + d^2)$, lo cual es cierto pues basta efectuar el paréntesis.

Ejercicio C/9-2. Encontrar la posición relativa de la recta $r: x + y + z = 3,\ 2x - y + 3z = -2$ y la recta $s: 3x + y - z = -1,\ -x + 4y - 5z = -20$.

La consideración del sistema formado por estas cuatro ecuaciones nos dará su posición,

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ 3x + y - z = -1 \\ -x + 4y - 5z = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 - y - z \\ 2(3 - y - z) - y + 3z = -2 \\ 3(3 - y - z) + y - z = -1 \\ -(3 - y - z) + 4y - 5z = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y + 3z = -8 \\ y + 2z = 5 \\ 5y + 4z = -17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 5 - 2z \\ 7z = 23 \\ 14z = 48 \end{array}\right\}$$

Al ser el sistema incompatible, las dos rectas no tienen un punto común, se cruzan.

Ejercicio C/9-3. Determinar la posición relativa de los planos $2x - 3y + z - 1 = 0$, $4x - 6y + 2z + 7 = 0$.

Como $2/4 = (-3)/(-6) = 1/2 \neq (-1)/7$, los planos son paralelos no coincidentes.

Ejercicio C/9-4. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x/3 = (y - 3)/(-2) = (z - 4)/1$, y que además es perpendicular al plano $5x - y + 4z = 2$.

El haz de planos que pasa por la recta dada, $-2x = 3y - 9$, $y - 3 = -2z + 8$, es $(2x + 3y - 9) + \lambda(y + 2z - 11) = 0$ o sea $2x + (3 + \lambda)\,y + 2\lambda x - 11\lambda - 9 = 0$. La condición de perpendicularidad del otro plano implica $5 \cdot 2 - (3 + \lambda) + 4 \cdot 2\lambda - 9 = 0$ de orden $\lambda = -1$, por tanto el plano buscado es el $x + y - z + 1 = 0$.

Ejercicio C/9-5. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -3, -4)$ y que es perpendicular a los planos $x + 2y - z = 8$, $7x - 2y + z = 3$.

Sea $Ax + By + Cz + D = 0$ el plano buscado, por pasar por $(2, -3, -4)$ se cumplirá que $2A - 3B - 4C + D = 0$ y las dos condiciones de perpendicularidad son: $A + 2B - C = 0$. Se tiene pues el sistema

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0;\ A + 2B - C = 0 \\ 2A - 3B - 4C + D = 0;\ 7A - 2B + C = 0 \end{array}\right\}$$

eleminando A, B y C se tiene finalmente la ecuación $y + 2z + 11 = 0$, que es la ecuación del plano buscado.

Ejercicio C/9-6. Dado el punto $A = (1, 3, 0)$ y el plano $x + 2y + z - 1 = 0$, hallar las coordenadas del punto simétrico del A respecto a dicho plano.

La recta perpendicular al plano por A tiene como ecuación $(x - 1)/1 = (y - 3)/2 = z/1$ pues el vector asociado del plano es un vector director de la recta perpendicular. La intersección de la recta y el plano será la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = (y - 3)/2 = z \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$. Entonces si las coordenadas del punto simétrio del A son (m, n, p), se cumplirá que $(0, 1, -1) = [(1 + m)/2, (3 + n)/2, p/2]$, de donde se deduce que $(m, n, p) = (-1, -1, -2)$.

Ejercicio C/10-1. Hallar el ángulo que forman la recta determinada por los puntos $(1, 0, 0)$ y $(2, 1, 1)$, y el plano determinado por el punto $(1, 2, 0)$ y la recta

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

El haz de planos que pasa por la recta tiene como ecuación $x + y + z + 1 + \lambda (x - y - z - 1) = 0$. Por pasar por $(1, 2, 0)$, se tendrá que $1 + 2 + 1 + \lambda (1, -2, -2) = 0$ con lo que $\lambda = 4/3$, por tanto el plano buscado es $x + y + z + 1 + (4/3)(x - y - z - 2) = 0$ es decir $7x - y - z - 5 = 0$.
La recta que determinan los puntos $(1, 0, 0)$ y $(2, 1, 1)$ es $(x - 1)/(2 - 1) = (y - 0)/(1 - 0) = (z - 0)/(1 - 0)$ o sea $x - 1 = y = z$. Como el vector asociado del plano es $(7, -1, -1)$ y un vector director de la recta es $(1, 1, 1)$, el ángulo formado por recta y plano valdrá

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|7 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{3\sqrt{17}} \text{ por lo que } \alpha = 23{,}8°.$$

Ejercicio C/10-2. Encontrar la distancia entre el punto $(-2, 3, 0)$ y la recta $(x - 2)/4 = (y + 3)/5 = (z + 1)/2$. Hallar también la distancia entre dicho punto y el plano $x - 2y + 8z = 3$.

Para resolver la primera parte del ejercicio se trazará el plano perpendicular a la recta dada y se buscará la distancia entre el punto y el punto de corte de dicho plano con la recta. La ecuación del plano que pasa por $(-2, 3, 0)$ y que es perpendicular al vector $(4, 5, 2)$ es $4(x + 2) + 5(y + 3) + 2z = 0$ o sea $4x + 5y + 2z - 7 = 0$. El punto de corte de recta y plano vendrá dado por la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y + 2z = 7 \\ 5x - 4y = 22 \\ 2y - 5z = -1 \end{array}\right\}$$

que es $x = 154/45$, $y = -55/45$, $z = -13/45$. Por lo tanto la distancicia buscada valdrá

$$d = \sqrt{(-2 - 154/45)^2 + (3 + 55/45)^2 + (13/45)^2} = \sqrt{2.129/45} \text{ unidades de longitud.}$$

Esta distancia también se puede calcular directamente empleando la ecuación vista en C/10. Como $(2, -3, -1)$ pertenece a la recta, un vector $\mathbf{v}$ que pase por este punto y por el punto $(-2, 3, 0)$ será $\mathbf{v} = (-4, 6, 1)$, entonces

$$d = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2/|\mathbf{u}|^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 1^2 - (-16 + 30 + 2)^2/(4^2 + 5^2 + 2^2)} = \sqrt{2.129/45}$$

Para hallar la distancia del punto al plano, en la segunda parte del ejercicio, basta aplicar

$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 - 3| / \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 8^2} = 11/\sqrt{69}$ unidades de longitud.

Ejercicio C/10-3. Hallar la ecuación de la recta paralela a la r_1 dada por $x = y = z$, y que se apoya en las rectas r_2 y r_3 definidas respectivamente por las ecuaciones $(x - 1)/3 = y/2 = z + 1$, $(x - 2)/2 = (y - 1)/2 = z/3$.

Si por la recta r_2 trazamos un plano paralelo a la r_1, la intersección de este plano con la recta r_3 será un punto tal que la paralela a r_1 por él es la recta pedida. En efecto, dicha recta corta a r_3 en el punto calculado y genéricamente a r_2 por ser coplanaria con ella. El plano paralelo a r_1 y r_2 tendrá como vector asociado un vector perpendicular a los vectores directores de estas rectas, es decir, $\mathbf{v} = (1, 1, 1) \times (3, 2, 1) = (-1, 2, -1)$. Como el plano pasa por el punto de r_1, $(1, 0, 1)$ por ejemplo, la ecuación del plano será

$$-(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + z = 0.$$

La intersección de este plano con la recta r_3 viene dada por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} (x - 2)/2 = (y - 1)/2 = z/3 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

que tiene como solución $(2, 1, 0)$. Por tanto la recta buscada tendrá la ecuación $(x - 2)/1 = (y - 1)/1 = z/1$, es decir $x - 2 = y - 1 = z$.

Ejercicio C/10-4. Hallar la ecuación del plano que contiene el punto $(1, 2, 3)$ y la recta intersección de los planos $3x + 2y - z = 0$, $2x + 3y + z - 3 = 0$.

Todo plano que contenga la intersección de dos planos será de la forma $a(3x + 2y - z) + b(2x + 3y + z - 3) = 0$; por contener además al punto $(1, 2, 3)$ se cumplirá que $a(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3) + b(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 - 3) = 0$, es decir, $4a + 8b = 0$. Tomando $a = 2$ y $b = -1$ (u otros valores proporcionales a éstos) y sustituyendo en la ecuación del haz se tiene la ecuación del plano, $4x + y - 3z + 3 = 0$.

Ejercicio C/10-5. Determinar la recta r incidente con el punto $P = (1, 0, 2)$ y que se apoya en las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones respectivas, $(x - 1)/3 = y/2 = (z + 1)/1$, $(x - 2)/1 = (y - 1)/2 = z/3$.

Como el punto P pertenece a la recta r, basta determinar otro punto Q de la misma. El plano incidente con r_1 y que pasa por P corta a la recta r_2 en un punto que será Q ya que la recta PQ contiene a P, corta a r_1 por ser coplanarias y en general no paralelas, y corta a la otra recta por tener el punto Q en común (fig. 33).

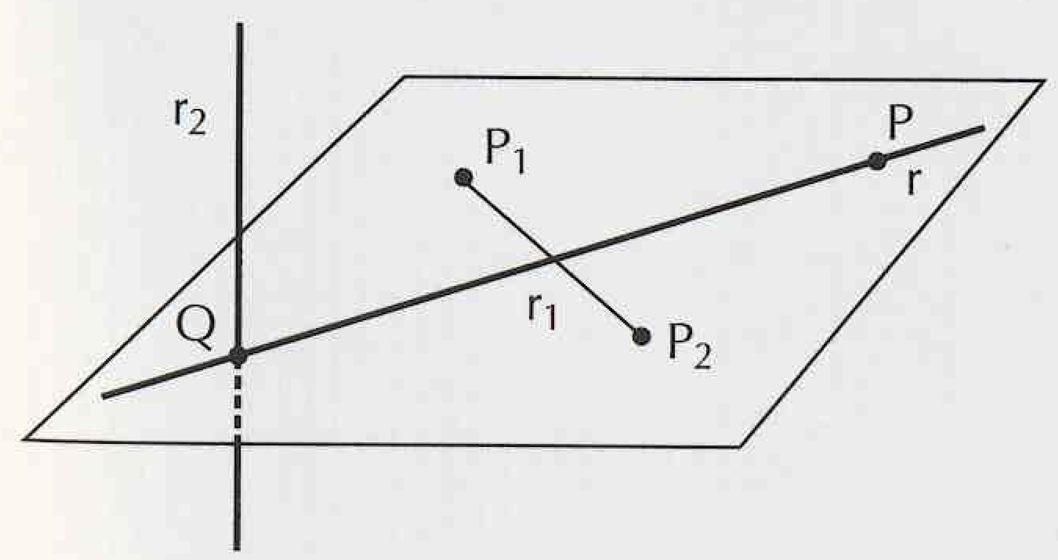


Fig. 33

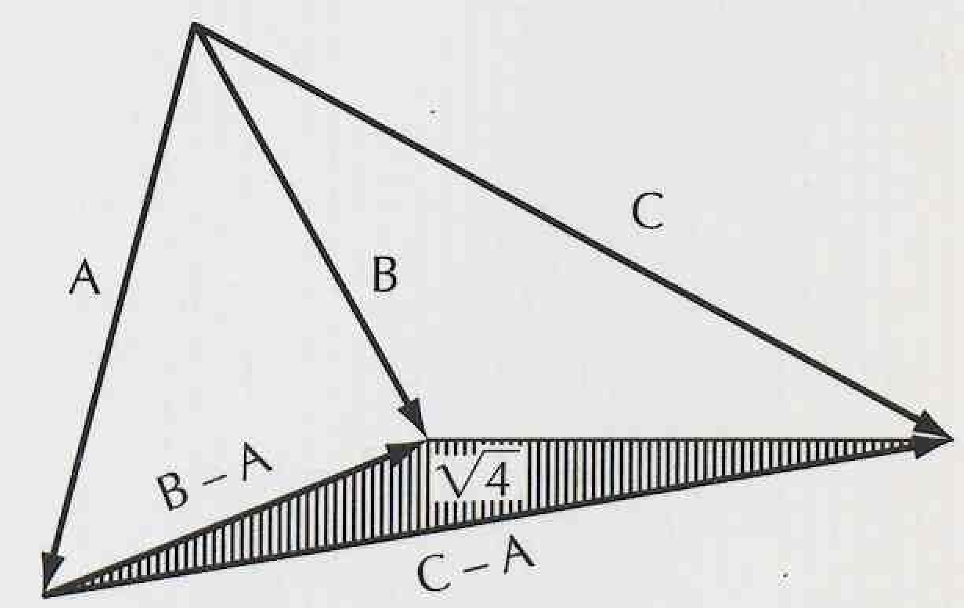


Fig. 34

Sean dos puntos r_1, por ejemplo $P_1 = (1, 0, -1)$ y $P_2 = (4, 2, 0)$; el plano que pasa por P, P_1 y P_2 será $(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(1 - 1, 0, 2 + 1) + \lambda(1 - 4, 0 - 2, 2 - 0) = (1, 0, -1) + \lambda(0, 0, 3) + \lambda(-3, -2, 2)$, cuya forma general es $2x - 3y - 2 = 0$. El punto Q, interseccción de este plano con la recta r_2, es la solución del sistema formado por las ecuaciones de esta recta y la del plano: $2x - 3y - 2 = 0$, $x - 2 = z/3$, $x - 2 = (y - 1/2)$; la solución de este sistema es $Q = (x, y, z) = (7/4, 1/2, 3/4)$. La recta que pasa por P y Q es la recta pedida: $(x - 1)/(7/4 - 1) = y/(1/2) = (z - 2)/(-3/4 - 2) \Rightarrow (x - 1)/3 = y/2 = (z - 2)/(-11)$.

Ejercicio C/10-6. Hallar el área de un triángulo de vértices $A = (3, 2, 4)$, $B = (4, 4, 5)$ y $C = (6, 3, 3)$.

Usando la expresión vista en C/10, se tiene $S = |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|/2 = (1/2)|4 - 3, 4 - 2, 5 - 4) \times (6 - 3, 3 - 2, 3 - 4)| = (1/2)\ |(1, 2, 1) \times (3, 1, -1)| = (1/2)\ |(-3, 4, -5)| = 5\sqrt{2}/2$ unidades de área.

Ejercicio C/10-7. Hallar el volumen del tetraedro determinado por los vértices $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 6, 0)$, $C = (0, 3, 2)$ y $D = (2, 3, 7)$.

El volumen vendrá dado por $V = (1/6)\ [(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD}]$, o sea $V = (1/6)\ [(2, 3, -1) \times (-1, 2, 1) \cdot (1, 2, 6)] = (1/6)[(7, -1, 9) \cdot (1, 2, 6)] = 59/6$ unidades de volumen.

Ejercicio C/10-8. Sea un tetraedro determinado por los vectores **A**, **B** y **C** y sean las superficies de sus caras S_1, S_2, S_3 y S_4. Probar que si $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_4$ son vectores cuyo módulo corresponde al valor de estas áreas, respectivamente, y su dirección es la normal a estas caras, hacia el exterior del tetraedro, entonces $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{0}$ (fig. 34).

Puesto que cada una de las caras del tetraedro viene definida por dos vectores, se tendrá que $\mathbf{V}_1 = (1/2)\ \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{V}_2 = (1/2)\ \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{V}_3 = (1/2)\ \mathbf{C} \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{V}_4 = (1/2)\ (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})$. La expresión de $\mathbf{V}_4$ se deriva del hecho que esta cara es la opuesta al triedro definido por los vectores **A**, **B** y **C**, por tanto los vectores que la definen deben expresarse como diferencia de aquellos vectores. Se tendrá entonces que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = (1/2)[\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})]$. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial se obtiene $(1/2)[\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{A}] = \mathbf{0}$.

CUADRO DE MATERIAS E ÍNDICE

MATERIAS